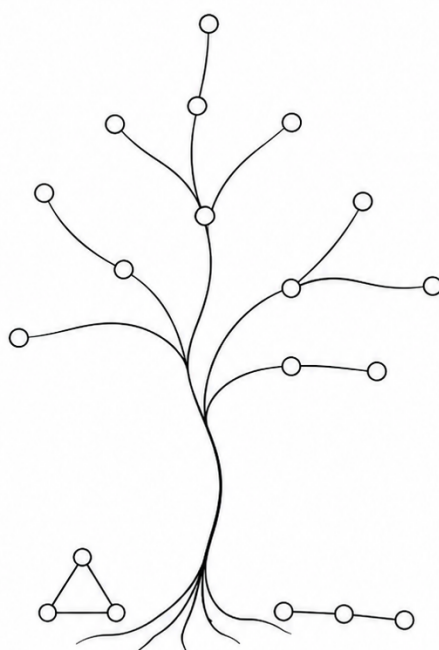


从点和线到一个猜想的终结

零基础与第一个反例

第一册 · Z00-Z14; 卡 01-17



PROJECT π Orchard 内部学习版

只从四则运算出发，第一次完整重建一个图论反例

2026 年 8 月 19 日 · A4 黑白双面印刷版

怎样使用这本讲义

这本讲义只假设两件事：你会整数、小数和分数的加、减、乘、除；你愿意停下来亲手画图、数数、算式子，并把答案用自己的话说出来。括号、负数、分数通分若不熟，Z00 会先补齐。它**不假设**你已经学过代数、集合、函数、图论、证明、概率、导数、上确界或极限。

论文原稿只有十几页，因为论文写给同行；同行看到一个符号就知道它背后的整套语言。零基础读者没有这套压缩词典。因此，本讲义把论文拆成 68 张掌握卡，并在它们之前增加一篇预备课。每张卡都遵守同一顺序：

1. **先讲人话**：用房间、道路、侦察员或棋盘建立直觉；
2. **再讲精确**：给出不能随意改字的数学陈述；
3. **为什么是真的**：把证明拆成能检查的小台阶；
4. **跟着做一遍**：完整演示一个最小例子；
5. **自己做**：必须停笔计算或画图；
6. **核对答案**：不只给结果，还解释错因；
7. **过关门**：只有能闭卷复述和重算，才进入下一卡。

最容易掉进去的坑

“认真看过”仍可能只是产生熟悉感。真正的“会”至少包括三件事：能换一种说法解释，能在新例子上计算，能指出一个错误证明错在哪里。只阅读答案而没有先动手，不能算通过。

推荐学习节奏

每天学习 2–4 张卡。每张卡第一次读约 15–30 分钟，闭卷任务约 10–25 分钟。遇到红线卡，应在第二天不看讲义再做一次。每次结束时，把自己的答案录入配套的交互审查文件并导出 JSON 备份。

本书的两条阅读道路

- **主路**：从四则运算和图形直觉起步；所需代数、集合与函数语言全部在 Z00–Z14 内现教现用，随后理解反例构造、固定度无界违反以及上下界夹逼。

- **进阶路：**概率期望、导数与上确界放在单独的严格框中，用来达到论文作者应有的证明精度。

主路不是“删掉严格性”。它只是先用有限例子和不等式变化解释方向，再在进阶框补齐标准数学语言。

完成标准

全书读完不等于作者责任门自动通过。你还必须：

- 在交互文件中逐张完成 68 卡；
- 闭卷重建补集引理、loaded-tree 余量公式、平方图上界和 rook 极限；
- 随机更换参数后仍能重算；
- 清楚区分前人工作、本文候选新结果、计算证据和开放问题；
- 通过正式口试和外部人类专家审查。

本册导航

学完本卡，你应该能做到

本册覆盖零基础预备篇以及卡 01–17。学完并通过本册总门后，你应当能够：读懂图论基本语言，证明 $\tau_D + \rho = n$ ，并完整构造与验证 $H_{t,r}$ 。

再讲精确

开始前请确认：不预设图论、代数、概率或极限；只要求会整数、小数和分数的四则运算。不会括号、负数或分数通分时，先做 Z00，不得跳过。若其中一项不能闭卷完成，请先按卡号返回相应前册复习；不要只凭“看着眼熟”跳过。

跨册引用一律使用卡号和概念名，不依赖另一册的页码。因此，不同印次或不同装订方式不会破坏学习路线。

目录

怎样使用这本讲义	ii
本册导航	iv
第一部分 零基础预备篇：先学会看懂数学	1
第一章 零基础预备课：先学会数学家使用的语言	2
Z00 四则运算热身	2
1.1 Z01 命题、真假与量词	3
1.2 Z02 集合、补集与边的指纹	5
1.3 Z03 变量、参数、函数与依赖顺序	6
1.4 Z04 图：只保留谁与谁相连	8
1.5 Z05 阶、边数、度数与最大度	9
1.6 Z06 计数、分组与“选两个”	11
1.7 Z07 路、距离、连通分量与直径	12
1.8 Z08 可行集合、最小值与最大值	14
1.9 Z09 直接证明、反证法与分类穷尽	15
1.10 Z10 分数、不等号、因式分解与整数余量	17
1.11 Z11 有限平均、倒数不等式、AM-GM 与取整	19
1.12 Z12 数列、极限、上确界与夹逼	21
1.13 Z13 大 O 记号、渐近等价、下极限与上极限	22
1.14 Z14 有限概率、期望、指示变量与概率方法	25
1.15 预备篇总过关门：进入卡 01 前的闭卷考试	27
第二部分 从定义到第一个反例	29
第二章 第一篇：对象、互补与余量	30
2.1 卡 01：研究对象与边界约定	30

2.2	卡 02: identifying vertex cover: 给每条边一个不同指纹	33
2.3	卡 03: packing: 彼此至少隔三步的选点	35
2.4	卡 04: 补集引理正向: 识别顶点覆盖之外一定是 packing	37
2.5	卡 05: 补集引理反向: packing 的补集一定能覆盖并识别边	40
2.6	卡 06: 极值恒等式: $\tau_D(G) + \rho(G) = n$	43
2.7	卡 07: Henning-Yeo 右端必须使用实际最大度	45
2.8	卡 08: 整数余量与加性差: 先把负号钉死	47
2.9	卡 09: 亏损改写: 把全图公式拆成每个点的贡献	50
第三章	第二篇: 第一个反例积木 $H_{t,r}$	54
3.1	卡 10: 构造 $H_{t,r}$: 先把积木搭对	54
3.2	卡 11: 数清阶与边数: 每一类只数一次	57
3.3	卡 12: 逐类数度, 并证明实际最大度恰为 $t + r$	59
3.4	卡 13: 直径至多二: 把所有非邻接类型一格不漏地检查	61
3.5	卡 14: 从直径二得到 $\rho = 1$ 与 $\tau_D = n - 1$	64
3.6	卡 15: 块余量的完整代数: $\mu(H_{t,r}) = -(t - 1)(r - 1)$	66
3.7	卡 16: 量词结论: 每个实际最大度 $\Delta \geq 4$ 都有反例	69
3.8	卡 17: 单块加性差与对角极限: 趋近 $1/4$, 但不是固定度无界	71
附录 A	公式地图: 每一条等式从哪里来	74
附录 B	本册总门、错题与延迟复测记录	76
附录 C	零基础中英术语与符号表	78
附录 D	68 卡最终掌握清单	80

第一部分

零基础预备篇：先学会看懂数学

第一章 零基础预备课：先学会数学家使用的语言

本篇不假定你学过图论、代数、概率、微积分或大学极限。唯一入口是：会做整数、小数和分数的加、减、乘、除。它不是“名词表”，而是一个四则热身和十四个必须逐一过关的学习单元。请准备纸、笔和错题记录表；看懂答案不算通过，闭卷换题做对才算。

学完本卡，你应该能做到

完成 Z01–Z14 后，你应能独立读懂本书后续使用的集合、图、距离、最值、量词、整数余量、有限平均、概率期望、上确界和渐近语言。每单元的入口诊断决定你从哪里开始；掌握门决定你能否前进。

Z00 四则运算热身：本书唯一默认的起点

新词与符号

本书从这里才开始引入数学简写。 $2(3+4)$ 表示 $2 \times (3+4)$ ； 3^2 表示 3×3 ；分数线 a/b 表示 $a \div b$ ；负号表示从零向相反方向走。括号内先算，乘除先于加减；同一级从左向右。

跟着做一遍

完整例 A： $2(3+4) - 5 = 2 \times 7 - 5 = 14 - 5 = 9$ 。每次只做一个动作，等号两边必须仍是同一个数。

完整例 B： $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$ 。通分只是把同一个数换成同样大小、分母相同的写法。

先遮住答案，自己做

闭卷算：(1) $18 - 3(2+1)$ ；(2) $-4 + 7$ ；(3) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ ；(4) $\frac{3 \times 8}{4}$ 。答案依次为 9, 3, $\frac{5}{12}$, 6。任一题错，重做例 A/B 并自编一道同题型；四题与自编题全对后再进 Z01。

本卡过关门

☐ 我能解释括号、分数线、乘号省略、平方和负号；

☐ 我能逐行写四则过程而不跳步；

☐ 一天后能把 (1) 改为 $20 - 4(3+1)$ 、把 (3) 改为 $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$ 并分别得到 $4, \frac{1}{2}$ 。未通过就停在 Z00。

1.1 Z01 命题、真假与量词

学完本卡，你应该能做到

本单元目标：分清对象、命题和证明；准确读写“对所有”“存在”“如果……那么……”及其否定。

先遮住答案，自己做

人口诊断（不查书）：

1. “七”和“七是奇数”哪一句能判断真假？若不会，回到下文“什么是命题”。
2. 把“每位同学都交了作业”改写成一句能推翻它的话。若不会，回到“量词的否定”。
3. 判断“若 $x > 3$ ，则 $x > 1$ ”中哪部分是条件、哪部分是结论。若不会，回到“箭头不是双向门”。

三题全对才能跳过基础讲解；任一题错，按所标小节顺序学习。

什么是命题

对象是被讨论的东西，例如顶点、边、集合或数字；**命题**是能够确定为真或假的完整陈述。“图 G ”只是对象，“图 G 连通”才是命题。含自由变量的句子如“ $x > 3$ ”还不是确定命题，除非给出 x 或说明量词。

新词与符号

$\forall$ 读作“对所有”； $\exists$ 读作“存在”； $P \Rightarrow Q$ 读作“若 P ，则 Q ”； $P \Leftrightarrow Q$ 读作“ P 当且仅当 Q ”。

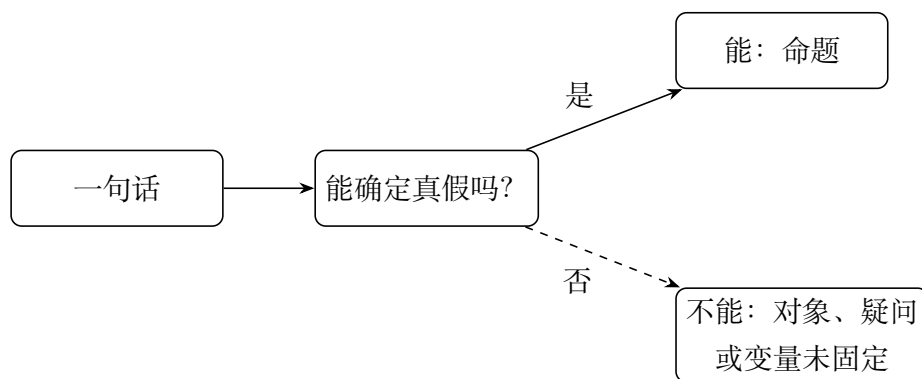


图 Z01-1：先问“能否判真伪”，再谈证明。实线表示进入证明任务，虚线表示还需补充信息。

跟着做一遍

完整例 A（最小例）：“存在一个偶数大于三”是真的，因为 4 就是见证。存在命题只需给出一个合法对象，并逐项核对条件。

跟着做一遍

完整例 B (边界反例): “所有质数都是奇数”是假的。反例 2 同时满足“是质数”与“不是奇数”。列出 3, 5, 7 都支持原句, 却不能证明“所有”。

量词的否定与箭头方向

否定“所有对象都有性质 P ”等价于“存在一个对象没有性质 P ”; 否定“存在对象有性质 P ”等价于“所有对象都没有性质 P ”。而 $P \Rightarrow Q$ 只允许从 P 推 Q , 不能自动反推。

跟着做一遍

半开放例: 把“对每个整数 n , 都存在整数 $m > n$ ”画成两层选择树。先由对手给 n , 再由你给 $m = n + 1$ 。若交换量词成“存在一个 m , 使它大于所有整数 n ”, 任务便不可能。请自行用 $n = m + 1$ 反驳交换后的句子。

先遮住答案, 自己做

分层练习:

- L1-1.** 判断 “ $V(G)$ ” “ $|V(G)| = 8$ ” “为什么连通?” 中哪些是命题。
- L1-2.** 写出“存在一张最大度为四的反例图”的否定。
- L2-1.** 在“若连通图直径为二, 则 packing 至多取一个点”中写出条件与结论; 逆命题是否自动成立?
- L2-2.** 否定“对每个 $\Delta \geq 4$ 和每个 $M > 0$, 存在一张图使差值大于 M ”。
- L3-1.** 说明“对每个 Δ , 存在 k ”与“存在 k , 对每个 Δ ”为何不同, 并各举一个数字例子。

核对答案与推理

L2-2 六层完整答案。

- 定义起点:** 原句为 $\forall \Delta \geq 4 \forall M > 0 \exists G P(\Delta, M, G)$ 。
- 逐步变形:** 否定时量词逐层翻转: $\forall$ 变 $\exists$, $\exists$ 变 $\forall$, 最后否定性质 P 。
- 合法性:** 这是“所有/存在”的标准否定规则, 不改变量词的原顺序。
- 结论:** 存在某个 $\Delta \geq 4$ 和某个 $M > 0$, 使得每一张所讨论的图的差值都不大于 M 。
- 易错与复核:** 不能写成“所有 Δ 都失败”; 一个失败的 Δ 已足够否定原来的“每个 Δ ”。把所得否定再否定一次, 应回到原句。
- 评分点/最低表述:** 2 分量词全翻转, 1 分顺序不乱, 1 分把“大于 M ”否定成“不大于 M ”。

其余速核: L1-1 只有第二句是命题; L1-2 为“所有最大度为四的图都不是反例”。L2-1 条件是连通且直径二, 结论是 packing 大小至多一; 逆命题不自动成立。L3 可用“每人有一把合身钥匙”与“一把钥匙适合所有人”说明。

先遮住答案，自己做

一天后**新题**：闭卷否定：“对所有 $t, r \geq 2$, $H_{t,r}$ 都满足猜想上界。”再说明只找到一组什么数据就能推翻它。

本卡过关门

☐ 我能闭卷写出四个逻辑符号的读法； ☐ 我能给全称命题找反例； ☐ 我能保持量词顺序完成否定； ☐ 我能口头解释箭头为何不能倒用。自评信心 1-5: ____。低于 3 或不能记录一次真实错因，回到对应小节，不进入 Z02。

1.2 Z02 集合、补集与边的指纹**学完本卡，你应该能做到**

目标：读写属于、子集、大小、交集、差集；把边看成二元素集合并计算 $e \cap T$ 。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) $3 \in \{1, 3, 5\}$ 吗？错则回 Z01 “命题”。(2) $\{1, 1, 2\}$ 有几个不同元素？错则读“集合不计重复”。(3) 能否把边 ab 写成 $\{a, b\}$ ？不确定则读“边也是集合”。

集合是一批确定对象组成的“盒子”；顺序和重复不产生新元素。若全集为 V ，则 $V \setminus T$ 是所有不在 T 中的元素。交集 $A \cap B$ 是同时属于二者的元素。

新词与符号

$x \in A$: x 属于 A ; $A \subseteq B$: A 的每个元素都在 B ; $|A|$: 不同元素个数; $\emptyset$: 空集; $B \setminus A$: 在 B 而不在 A 。

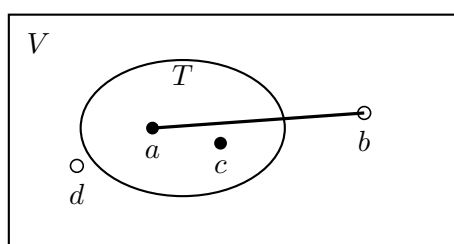


图 Z02-1: 黑点在 T 内，空心点在 $V \setminus T$ 。粗边 $e = \{a, b\}$ 的指纹为 $e \cap T = \{a\}$ 。

跟着做一遍

完整例 A：若 $V = \{a, b, c, d\}$, $T = \{a, c\}$, 则 $V \setminus T = \{b, d\}$; 对 $e = \{a, b\}$ 有 $e \cap T = \{a\}$ 。

跟着做一遍

完整例 B (边界)：若 $f = \{b, d\}$, 则 $f \cap T = \emptyset$; 若 $g = \{a, c\}$, 则 $g \cap T = \{a, c\}$ 。指纹可以有 0、1 或 2 个端点。

跟着做一遍

半开放例：在三角形顶点 $\{1, 2, 3\}$ 中选择 T ，使三条边在 T 上的指纹两两不同。先试 $|T| = 1$ 并记录失败，再试 $|T| = 2$ 。

先遮住答案，自己做**分层练习：**

L1-1. $A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 3, 4\}$ ，求 $A \cap B, A \setminus B, |A \cup B|$ 。

L1-2. $V = \{p, q, r, s\}, T = \{q, s\}$ ，求 $V \setminus T$ 。

L2-1. 对边 pq, qr, rs 计算它们在 $T = \{q, s\}$ 上的指纹并查重。

L2-2. 证明 $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ 。

L3-1. 在四边形循环中找一个 T ，使四条边的非空指纹两两不同；若做不到，给出完备理由。

核对答案与推理

L2-1 六层答案。(1) 定义：边 xy 是 $\{x, y\}$ ，指纹是与 T 的交集。(2) 计算： $pq \cap T = \{q\}$ ， $qr \cap T = \{q\}$ ， $rs \cap T = \{s\}$ 。(3) 合法性：只保留同时属于端点集与 T 的点。(4) 结论：前两条边指纹重复。(5) 易错/复核：交集不是线段的几何交叉；逐点核对归属。(6) 评分：三个交集各 1 分，重复判定与解释 1 分。

速核：L1-1 为 $\{2, 4\}, \{1\}, 4$ ；L1-2 为 $\{p, r\}$ 。L2-2 直接由差集定义。L3 可以取 $T = \{1, 2, 3\}$ ：四条边 12, 23, 34, 41 的指纹依次为 $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{1\}$ ，非空且两两不同。

先遮住答案，自己做

一天后新题：在路径 $a - b - c - d$ 中取 $T = \{a, c\}$ ，计算三条边的指纹；只改动一个顶点使所有指纹非空且两两不同。

本卡过关门

☐ 能把边当二元素集合； ☐ 能算交集与补集； ☐ 能发现重复指纹； ☐ 能解释空指纹。信心____/5；低于 3 回退例 A/B。

1.3 Z03 变量、参数、函数与依赖顺序**学完本卡，你应该能做到**

目标：分清变化量、暂时固定量和输入-输出规则；读懂下标与“先固定、再变化”。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 计算 $2k + 1$ 在 $k = 3$ 时的值；错则复习整数运算。(2) 解释量词顺序为何重要；错则回 Z01。(3) 写出 $\{1, \dots, k\}$ 在 $k = 4$ 时的元素；错则回 Z02。

变量在允许范围中变化；参数在一轮讨论中固定、下一轮可换；函数把每个合法输入配给唯

一输出。下标标记“哪个对象”，不一定表示乘法。

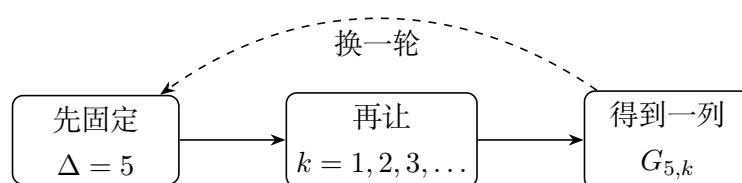


图 Z03-1: 虚线只在一轮结束后回去更换 Δ ; 不能在同一项里偷换参数。

跟着做一遍

完整例 A: $f(k) = 2k + 1$ 在输入 $1, 2, 3$ 时输出 $3, 5, 7$; f 是规则, 不是一个待求未知数。

跟着做一遍

完整例 B (边界): c_Δ 表示固定实际最大度恰为 Δ 后再对图取上确界。 c_4, c_5 是同一规则的不同输出, 不是一张图同时有两个最大度。

跟着做一遍

半开放例: 对 $F(t, r) = t + 2r + 2$, 画 $t = 2, 3$ 与 $r = 2, 3, 4$ 的六格表; 观察每个参数加一时输出改变多少。

先遮住答案, 自己做

分层练习:

L1-1. 列 $g(s) = s^2$ 在 $s = 1, 2, 3, 4$ 的输出。

L1-2. 暂定 $t = 2$ 让 r 变化, 谁是本轮参数、谁是变量?

L2-1. 解正整数方程 $F(t, r) = 10$ 。

L2-2. “ k 足够大” 是否表示存在与 Δ 无关的统一 k ?

L3-1. 用量词写出: 每固定 $\Delta \geq 4$, 都能选足够大的 k 使差值超过任意 $M > 0$ 。

核对答案与推理

L3 六层答案。 (1) “每固定” 是 $\forall \Delta$, “任意给定” 是 $\forall M$, “能选” 是 $\exists k$ 。(2) 次序先 Δ 、再 M 、最后 k 。(3) $\forall \Delta \geq 4 \forall M > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, 使 $G_{\Delta, k}$ 的差值大于 M 。(4) 写依赖下标防止偷换对象。(5) 若把 $\exists k$ 移到最前, 要求一个块数压过任意 M , 显然会被更大 M 反驳。(6) 评分: 量词和次序 3 分, 对象依赖与结论 2 分。

速核: L1 为 $1, 4, 9, 16$; 本轮 t 固定、 r 变。L2-1 为 $(6, 1), (4, 2), (2, 3)$; 若另要求 $t, r \geq 2$ 则删第一组。L2-2 不一定, k 通常依赖 Δ, M 。

先遮住答案, 自己做

一天后新题: $Q(r, k) = rk + 2(k - 1)$ 。先固定 $r = 3$ 列前三项, 再固定 $k = 3$ 比较 $r = 2, 3, 4$; 说明两次实验的变量不同。

本卡过关门

☐ 能列函数表； ☐ 能解释下标； ☐ 能按依赖次序写量词； ☐ 不把一列有限图叫成一张无限图。信心____/5。

1.4 Z04 图：只保留谁与谁相连

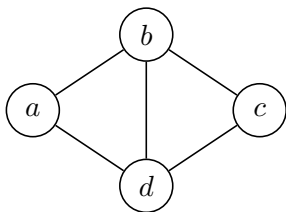
学完本卡，你应该能做到

目标：在图画、顶点集和边集之间互译；理解有限、简单、无向与同构画法。

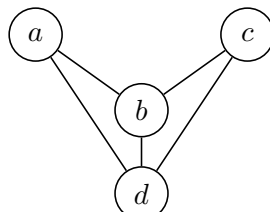
先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 写 $\{a, b, c\}$ 的所有二元素子集；错则回 Z02。(2) “ a, b 相连”能判真吗？错则回 Z01。(3) 改点名是否必然改变连接关系？不确定则学习本单元。

图 G 由 $V(G)$ 与 $E(G)$ 组成。本文只研究有限简单无向图：顶点、边有限；没有自环和重复边；边没有方向， $ab = ba$ 。



画法一



同一连接关系的画法二

图 Z04-1：位置和旋转不重要；逐点比较邻居集合核对结构。

跟着做一遍

完整例 A：图中 $V = \{a, b, c, d\}$ ， $E = \{ab, bc, cd, da, bd\}$ 。

跟着做一遍

完整例 B (边界)：重复写 ab 不增加简单图边数；加入 aa 出现自环；画 $a \rightarrow b$ 变成有向图。后两种都离开本文范围。

跟着做一遍

半开放例：画两张外观明显不同但都是循环 C_4 的图，给出逐点对应，并检查对应保持边与非边。

先遮住答案，自己做

分层练习：

L1-1. 画 $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $E = \{12, 23, 34\}$ 。

L1-2. 写三角形的 V, E 。

L2-1. 重复边、自环、箭头各违反哪条约定？

L2-2. 路径 $1-2-3-4$ 与三叶星是否同构？

L3-1. 证明两张有标号简单图相等，只需证明顶点集相等且每对不同顶点在一图相邻当且仅当在另一图相邻。

核对答案与推理

L2-2 六层答案。 (1) 同构允许改名但保持相邻。(2) 路径度数为 $1, 2, 2, 1$ ；三叶星为 $3, 1, 1, 1$ 。(3) 改名不改变一个顶点接几条边。(4) 度数多重集合不同，故不同构。(5) 不要因都画三条线就判同构；反向也不能只靠度序列相同判同构。(6) 评分：定义 1 分，两组度数 2 分，不变量与结论 2 分。

速核：L2-1 分别违反“不重复”“无自环”“无向”。L3 因简单图的全部结构正由顶点集与每对点是否成边决定。

先遮住答案，自己做

一天后新题：给五顶点边集 $\{12, 13, 24, 35, 45\}$ 画两种外观，并逐边核对它们表示同一结构。

本卡过关门

☐ 能在图画与 (V, E) 间互译； ☐ 能指出三条对象边界； ☐ 能用结构而非外观比较图； ☐ 能写出核对证据。信心 ____/5。

1.5 Z05 阶、边数、度数与最大度

学完本卡，你应该能做到

目标：准确计算 $n, m, d_G(v), \Delta(G)$ ，并用握手引理双向复核。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 能从边集数边吗？错则回 Z04。(2) “最大值”是实际达到的数还是预先允许的上限？不确定则读“实际最大度”。(3) 计算 $2+3+3+2$ ；错则复习整数加法。

图的阶为 $n = |V(G)|$ ，边数为 $m = |E(G)|$ 。顶点 v 的度数 $d_G(v)$ 是以它为端点的边数；实际最大度

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

必须既证明所有度数不超过候选值，又指出至少一个点达到它。

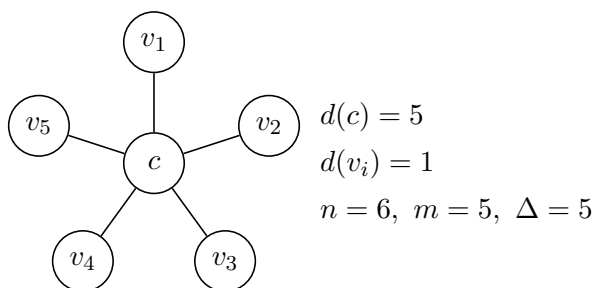


图 Z05-1: 星图的中心达到最大度; 最大度不是顶点数, 也不是允许上限。

每条无向边有两个端点, 所以

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m. \quad (1.1)$$

左边按顶点数边端, 右边按每条边贡献两个端点数; 这是同一批“边-端点关联”的两种计数。

跟着做一遍

完整例 A: 三角形中每点度二, 度数和六, 边数三, 满足 $6 = 2 \times 3$; $n = 3, m = 3, \Delta = 2$ 。

跟着做一遍

完整例 B (边界): 无边图可以有顶点却没有边, 例如三点无边图的度序列是 $0, 0, 0$, 故 $m = 0, \Delta = 0$ 。本书把零顶点图 $V = \emptyset$ 单独称为空图; “三点无边图”不是空图。不能因“有三个点”便写 $\Delta = 3$ 。

跟着做一遍

半开放例: 设计一张五顶点、四条边、最大度恰为三的连通图; 列出度序列并用握手引理复核。再问: 能否让最大度恰为四?

先遮住答案, 自己做

分层练习:

L1-1. 求路径 P_5 的 n, m 、度序列和 Δ 。

L1-2. 求循环 C_6 的相同参数。

L2-1. 度序列 $3, 3, 2, 2, 2$ 能否来自简单图? 先用握手引理做必要检查。

L2-2. 证明任何有限图的奇度顶点数为偶数。

L3-1. 已知一张简单图有 n 个点, 证明 $\Delta \leq n - 1$; 并说明何时取等号。

核对答案与推理

L2-2 六层答案。 (1) 由握手引理, 全部度数之和 $2m$ 为偶数。(2) 把偶度点贡献的偶数先去掉, 剩下奇度点的奇数之和仍为偶数。(3) 奇数个奇数相加为奇数, 偶数个奇数相加为偶数。(4) 因此奇度顶点数必为偶数。(5) 只说“握手引理所以显然”不够; 应写出奇偶分离。可用星图和路径复核。(6) 评分: 握手引理 1 分, 分离 2 分, 奇偶结论 1 分。

速核: P_5 为 $n = 5, m = 4, (1, 2, 2, 2, 1), \Delta = 2$; C_6 为 $6, 6$, 全度二。L2-1 度和 12 通过必要检查, 并可由边集 $\{AB, AC, AD, BC, BE, DE\}$ 实现, 度数依次为 $3, 3, 2, 2, 2$; 注意

“度和为偶数”本身只是必要条件。L3 因简单图中一个点至多连接其余 $n-1$ 点；存在全邻点时取等号。

先遮住答案，自己做

一天后新题：从边集 $\{12, 13, 14, 24, 25, 35\}$ 计算度序列、 n, m, Δ ，再用式 (1.1) 复核。

本卡过关门

☐ 能逐边计度； ☐ 能用“上界 + 达到”证最大度； ☐ 能双计数证明握手引理； ☐ 能用度和查错。信心____/5。

1.6 Z06 计数、分组与“选两个”

学完本卡，你应该能做到

目标：使用加法、乘法、除重与分类计数；解释团为何有 $\binom{r}{2}$ 条边。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 两类互不重叠对象分别 3 个和 5 个，共几个？错则读“加法”。(2) 两步分别 2、4 种选择，共几个有序结果？错则读“乘法”。(3) ab 与 ba 是否同一无向边？错则回 Z04。

互不重叠的类别用加法；连续独立选择用乘法；同一对象被均匀重复计数时要除重。 r 个点中先后选两个不同点有 $r(r-1)$ 种，但每条无向边按两个顺序数两次，故

$$\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}.$$

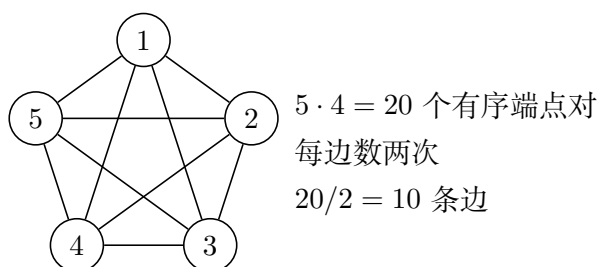


图 Z06-1: K_5 的十条边；“除以二”来自顺序重复，而不是公式记忆。

跟着做一遍

完整例 A： K_4 有 $4 \cdot 3 / 2 = 6$ 条边；列为 12, 13, 14, 23, 24, 34 可复核。

跟着做一遍

完整例 B (反例)：若选的是有向弧，则 $1 \rightarrow 2$ 与 $2 \rightarrow 1$ 不同，不能除以二；对象定义决定是否除重。

跟着做一遍

半开放例：一个图的边分为块内边、桥边两类。设计三块，每块 4 条内部边，相邻块之间各一桥；自行列分类表并求总边数，说明没有重计。

先遮住答案，自己做

分层练习：

L1-1. 求 $\binom{6}{2}$ 与 $\binom{7}{2}$ 。

L1-2. 三类互不重叠的边数为 2, 3, 5，总边数多少？

L2-1. 从六人中选一名组长和一名副组长有多少种？为什么不能除二？

L2-2. 用“选一个点再选邻点”的双计数重证握手引理。

L3-1. 若把 n 个点分成大小 p, q 的两组，只允许跨组连边，最多有多少边？证明每条边恰数一次。

核对答案与推理

L3 六层答案。(1) 每条允许边由“第一组一个点 + 第二组一个点”唯一决定。(2) 第一项有 p 种，第二项有 q 种。(3) 乘法原则给 pq 个有序跨组选项；因组别不同，交换端点不会产生第二个同型选择，无需除二。(4) 取所有这些边即达到 pq ，故最多且可达。(5) 易错是照搬 $\binom{n}{2}$ 或再除二；用 $p = 1, q = 3$ 的星图复核有 3 条。(6) 评分：唯一编码 2 分、乘法 1 分、上界和达到各 1 分。

速核： $\binom{6}{2} = 15, \binom{7}{2} = 21$ ；分类和为 10。正副组长有 $6 \cdot 5 = 30$ ，角色不同不能除二。L2-2 按起点计数得到 $\sum d(v)$ ，按无向边计数每边贡献两次。

先遮住答案，自己做

一天后新题： K_8 删除一个 K_3 内部的三条边后还剩多少边？必须写“总数-删数”的分类理由。

本卡过关门

☐ 能判断加法或乘法； ☐ 能解释何时除重； ☐ 能从对象定义推公式； ☐ 能用小例复核。信心____/5。

1.7 Z07 路、距离、连通分量与直径

学完本卡，你应该能做到

目标：计算最短路距离，区分路长与点数，判连通并计算直径。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 相邻点距离是多少？不确定则回 Z04。(2) 路 $1-2-3$ 有几条边？错则读“长度数边”。(3) “最短”是最少顶点还是最少边？不确定则学习本节。

从 u 沿相邻边走到 v 得到一条路；路长是走过的边数。距离 $\text{dist}_G(u, v)$ 是所有 $u-v$ 路的最小长度。同点距离 0，相邻点距离 1。不同连通分量的点没有有限路，记为 $+\infty$ 。连通图所有点对距离的最大值是直径。

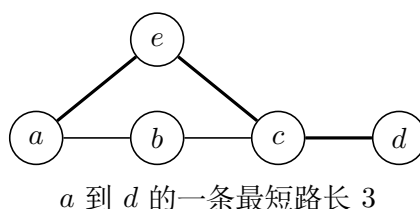


图 Z07-1：粗线是最短路之一；细线路存在不代表它更短。

跟着做一遍

完整例 A：路径 P_5 的端点距离 4，因此直径 4；中间点到端点距离分别 2。

跟着做一遍

完整例 B (边界)：删除 P_5 的中间边后图不连通，跨分量距离是 $+\infty$ ；不能把“两个分量各自直径的最大值”冒充原连通图直径。

跟着做一遍

半开放例：在六点循环上加一条对角线，选一条能尽量降低直径的对角线；制作距离表验证，而非凭图感。

先遮住答案，自己做**分层练习：**

L1-1. 求 C_5 中各可能距离与直径。

L1-2. 求五叶星任意两叶之间的距离与直径。

L2-1. 证明直径二的图中任意两个不同点距离至多二。

L2-2. 在图 Z07-1 中删边 ec ，重新求 $\text{dist}(a, d)$ 。

L3-1. 证明：若集合中的不同点两两距离至少三，而整张图直径至多二，则该集合至多含一个点。

核对答案与推理

L3 六层答案。(1) 假设集合含不同点 x, y 。(2) 集合规则给 $\text{dist}(x, y) \geq 3$ 。(3) 图直径至多二给任意点对、特别是 x, y 满足 $\text{dist}(x, y) \leq 2$ 。(4) 两式矛盾，故不能有两个不同点，大小至多一。(5) 易错是只说“直径小所以显然”；必须把同一对点代入两条界。小图 K_2 可复核。(6) 评分：选点 1 分，两界 2 分，矛盾与结论 1 分。

速核： C_5 距离为 0,1,2，直径 2；星图叶间距离 2，直径 2。删 ec 后 $a-b-c-d$ 长 3，仍有 $a-e$ 死端，不缩短。

先遮住答案，自己做

一天后新题：在图 $K_{2,3}$ 中列出三类点对距离并求直径；说明为何任取两个 packing 点会失败。

本卡过关门

☐ 路长数边不数点； ☐ 会列最短路与下界； ☐ 会处理不连通； ☐ 会用直径约束 packing。信心____/5。

1.8 Z08 可行集合、最小值与最大值

学完本卡，你应该能做到

目标：分清可行性与最优性；用“构造一边、排除另一边”证明精确最值。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 找到一个解是否等于证明它最优？若答“是”，回看图 Z08-1 与完整例 A。(2) $3 \leq x \leq 3$ 能推出什么？错则回 Z05 第一段的最大值定义。(3) 最大值的构造给上界还是下界？不确定则回看图 Z08-1 及其图注。

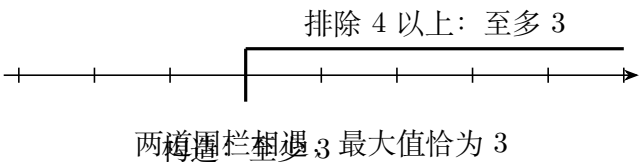


图 Z08-1：最大值的构造给下界，排除更大对象给上界；最小值方向相反。

跟着做一遍

完整例 A：从 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 选互不相邻整数。 $\{1, 3, 5\}$ 给“至少 3”；分组 $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$ 给“至多 3”，故最大值 3。

跟着做一遍

完整例 B (反例)：给最小顶点覆盖找到大小 4 的集合，只证明最小值 ≤ 4 ，不能排除存在大小 3。把不等号方向写反会让整篇证明失效。

跟着做一遍

半开放例：在路径 P_6 中选两两距离至少三的点。先给一个大小 2 的构造，再设计分组证明至多 2；尝试第三点并记录冲突位置。

先遮住答案，自己做**分层练习：****L1-1.** 对最小值，构造大小 5 给哪一方向？**L1-2.** 对最大值，证明每个可行集合至多 7 给哪一方向？**L2-1.** 求路径 P_4 的最大独立集大小并给双向证明。**L2-2.** 求三角形最小顶点覆盖大小并给双向证明。**L3-1.** 一张图分成 k 个直径至多二的纤维。证明任一 packing 每纤维至多取一个点，从而 $\rho \leq k$ ；再写出要得到等号还缺什么。**核对答案与推理**

L3 六层答案。 (1) packing 的不同点距离至少三。(2) 同一纤维任意两点距离至多二。(3) 若同纤维取两点，两条距离界矛盾，故每纤维至多一。(4) k 个纤维相加得总大小至多 k ，即 $\rho \leq k$ 。(5) 还需构造一个跨纤维的 k 点 packing 才能得 $\rho \geq k$ ；只说“每块选一个”还须验证跨块距离。(6) 评分：局部排除 2 分，求和 1 分，指出等号缺口 2 分。

速核：L1 分别是最小值上界、最大值上界。 P_4 最大独立集 2；三角形最小覆盖 2，均需构造与排除。

先遮住答案，自己做

一天后新题：在 C_7 中求最大独立集大小，必须分别写“至少”和“至多”，不能只画答案。

本卡过关门

☐ 能说清四种界的方向； ☐ 能给精确等号的两半证明； ☐ 能发现“只构造未排除”；
☐ 能换图迁移。信心____/5。

1.9 Z09 直接证明、反证法与分类穷尽**学完本卡，你应该能做到**

目标：按命题结构选择证明方法，写清每步依据，并证明分类没有遗漏。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 要推翻“所有”，应找什么？错则回 Z01。(2) 若上下界相撞，能推出精确值吗？错则回 Z08。(3) “偶数或奇数”是否覆盖所有整数？不确定则读分类穷尽。

直接证明从条件逐步推出结论；反证法假设结论失败并推出矛盾；分类穷尽把所有对象分成互斥且完整的类别。方法不是装饰，必须写出依据链。

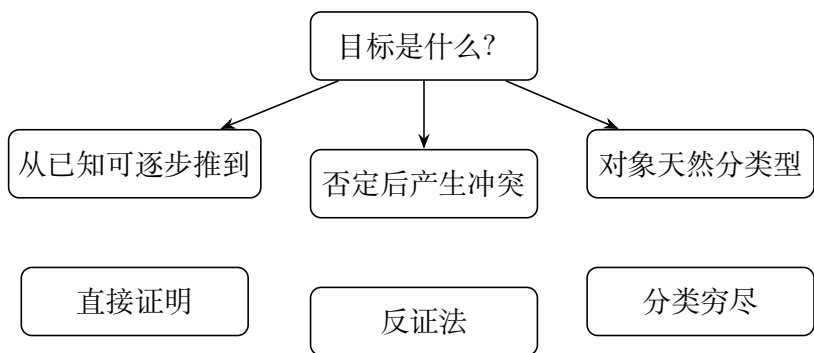


图 Z09-1: 选择方法后仍须给出完整依据; 同一命题也可能有多条证明路线。

跟着做一遍
完整例 A (直接): 若整数 $n = 2k$ 为偶数, 则 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, 故平方仍为偶数。
跟着做一遍
完整例 B (分类边界): 整数平方除四余 0 或 1。偶数写 $2k$; 奇数写 $2k + 1$ 。两类互斥且覆盖全部整数, 分别计算即可。漏写“覆盖全部”就不是完整穷尽。
跟着做一遍
半开放例: 证明一张直径二的图中 packing 至多一。分别尝试直接证明和反证法; 比较哪一种更短, 并圈出两条冲突的不等式。
先遮住答案, 自己做
分层练习: L1-1. 直接证明两个偶数之和为偶数。 L1-2. 用反例推翻“所有连通图直径都为二”。 L2-1. 用反证法证明不存在最大整数。 L2-2. 检查分类 $X-X, X-C, C-C$ 是否足以覆盖五类顶点 a, b, X, C, D 的所有非邻接点对; 列出遗漏。 L3-1. 给出“一个分类证明完整”的检查协议: 互斥性、完备性、每类结论、边界情况各如何验。
核对答案与推理
L2-1 六层答案。 (1) 假设存在最大整数 N。(2) 整数加一仍是整数, 故 $N + 1$ 是整数。(3) 因 $N + 1 > N$, 它比所谓最大整数更大。(4) 产生矛盾, 所以不存在最大整数。(5) 易错是说“整数无限多”却未给逻辑链; 用任意候选 N 构造更大者复核。(6) 评分: 反设 1 分、构造 1 分、比较 1 分、矛盾结论 1 分。 速核: L1-1 写成 $2a + 2b = 2(a + b)$; L1-2 路径 P_4 直径 3。L2-2 漏了含 a, b, D 的多类配对, 必须以完整类型矩阵核查。L3 四项均要显式出现。

先遮住答案，自己做

一天后**新题**：证明“奇数平方仍为奇数”，再写出其逆命题并判断是否成立；不得把原证明倒放当作自动证明。

本卡过关门

☐ 能选择并命名方法； ☐ 每步会写依据； ☐ 分类会证互斥与完备； ☐ 会找边界反例。信心____/5。

1.10 Z10 分数、不等号、因式分解与整数余量**学完本卡，你应该能做到**

目标：在分母为正时安全清分母；追踪负号与不等号方向；用 μ 的符号判定猜想。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 比较 $3/4$ 与 $2/3$ ；不会则读“正分母交叉相乘”。(2) 把 $x \geq 3$ 乘 -2 ，方向怎样？错则读“负数翻向”。(3) 展开 $(t-1)(r-1)$ ；错则复习乘法分配律。

若 $c > 0$ ，则 $a \leq b/c$ 等价于 $ca \leq b$ ；若乘除负数，不等号反向。论文把猜想右边减左边并清分母，定义

$$\mu(G) = \Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)\tau_D(G).$$

因 $\Delta^2 + 1 > 0$ ，有

$$\mu \geq 0 \iff \tau_D(G) \leq B_{HY}(G), \quad \mu < 0 \iff G \text{ 是反例},$$

且实际加性违反量为

$$\tau_D(G) - B_{HY}(G) = \frac{-\mu(G)}{\Delta^2 + 1}.$$

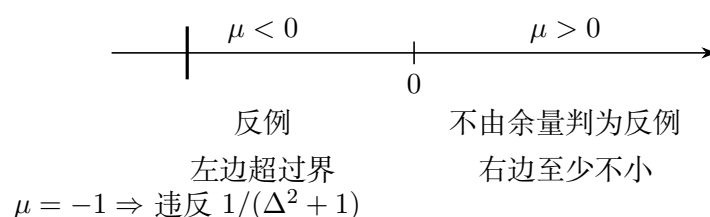


图 Z10-1：本书固定“右减左”；负余量才是反例。若改符号约定，全部方向都会变。

$$\tau_D \leq \frac{N}{\Delta^2 + 1} \xrightarrow{\text{乘正数}} (\Delta^2 + 1)\tau_D \leq N \xrightarrow{\text{移项}} \mu = N - (\Delta^2 + 1)\tau_D \geq 0$$

图 Z10-2：清分母三步账本；每一步都写明合法原因。

跟着做一遍

完整例 A: 若 $\Delta = 4, \mu = -1$, 则违反量 $1/(4^2 + 1) = 1/17$ 。负一不是“差一点成立”，而是严格反例。

跟着做一遍

完整例 B (负号边界): 由 $x \geq 3$ 得 $-2x \leq -6$ 。若将 x 的下界代入负项 $-2x$, 得到的是上界, 不是下界。

跟着做一遍

半开放例: 从 $-tr + t + r - 1$ 出发, 先提出负号, 再补成乘积, 得到 $-(t-1)(r-1)$; 自行反向展开复核, 并说明 $t, r \geq 2$ 时为何严格为负。

先遮住答案, 自己做

分层练习:

L1-1. 比较 $5/7$ 与 $7/10$, 写出分母正的依据。

L1-2. 若 $\mu = -5, \Delta = 4$, 求违反量。

L2-1. 因式分解 $-ab + 2a + 3b - 6$ 。

L2-2. 已知 $q \geq 10$, 给 $A - 3q$ 一个正确的上界; 解释方向。

L3-1. 从 $\tau_D + \rho = n$ 推导 $\mu = (\Delta^2 + 1)\rho - ((\Delta + 1)n - 2m)$, 逐行标出代入、展开、合并。

核对答案与推理

L3 六层答案。 (1) 定义起点是 $\tau_D = n - \rho$ 与余量定义。(2) 代入得 $\Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)(n - \rho)$ 。(3) 展开为 $\Delta(\Delta - 1)n - (\Delta^2 + 1)n + 2m + (\Delta^2 + 1)\rho$; 只用分配律。(4) n 的系数为 $\Delta^2 - \Delta - \Delta^2 - 1 = -(\Delta + 1)$, 整理即目标式。(5) 易错是漏掉括号前负号; 用任意小数值同时代入两式复核。(6) 评分: 代入 1 分, 展开 2 分, 系数化简 1 分, 结论 1 分。
速核: L1-1 比较 50 与 49, 故 $5/7 > 7/10$; L1-2 为 $5/17$ 。L2-1 为 $-(a-3)(b-2)$; L2-2 为 $A - 3q \leq A - 30$ 。

先遮住答案, 自己做

一天后新题: 用 $n = 8, m = 11, \Delta = 4, \tau_D = 7$ 逐项算 μ ; 再不用余量直接比较 7 与 $B_{HY}(G)$, 确认方向一致。

本卡过关门

☐ 只在确认分母为正后清分母; ☐ 负数乘法会翻向; ☐ 能从 μ 判反例; ☐ 能双路线复核。信心____/5, 低于 3 不进 Z11。

1.11 Z11 有限平均、倒数不等式、AM-GM 与取整

学完本卡，你应该能做到

目标：从有限和理解平均；证明 AM-HM 与二元 AM-GM；掌握根号、分数次幂和 floor 的两侧界。主线不用导数。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 2, 5, 8 的平均是多少？错则读“平均是均分”。(2) 若 $0 < a < b$ ，倒数谁大？错则回 Z10。(3) 找不超过 4.7 的最大整数；错则读“floor 数轴”。

正数 $x_1, \dots, x_n$ 的算术平均为 $A = (x_1 + \dots + x_n)/n$ ，调和平均为 $H = n/(1/x_1 + \dots + 1/x_n)$ 。恒有 $A \geq H$ ，等价于

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_i x_i}. \quad (1.2)$$

不用微积分也能证明：

$$\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i \frac{1}{x_i}\right) - n^2 = \sum_{i < j} \left(\sqrt{\frac{x_i}{x_j}} - \sqrt{\frac{x_j}{x_i}}\right)^2 \geq 0.$$

每项是平方，所以非负。对两个正数，二元 AM-GM 为

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

因为 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ 。两种等号都只在相关数全部相等时发生。



两端越不平衡，均分点不变，但几何平均下降

图 Z11-1：二元 AM-GM 的等号发生在两端重合，即 $x = y$ 。

向下取整 $s = \lfloor x \rfloor$ 是不超过 x 的最大整数，所以

$$s \leq x < s+1, \quad \text{等价地} \quad x-1 < s \leq x. \quad (1.3)$$

$\Delta^{2/3}$ 表示先取正的三次方根再平方；因正数上的立方严格递增，可用整数立方夹它。

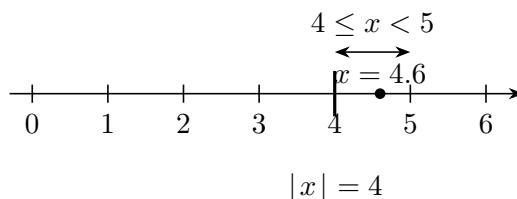


图 Z11-2：floor 向左落到整数格；必须同时保留左右两条界。

跟着做一遍

完整例 A: 对 2, 8, 算术平均 5, 调和平均 $2/(1/2 + 1/8) = 16/5$, 确有 $5 \geq 16/5$; 不等式 (1.2) 为 $5/8 \geq 4/10$ 。

跟着做一遍

完整例 B (floor 边界): $\lfloor 27^{2/3} \rfloor = 9$; 而 $\lfloor 10^{2/3} \rfloor = 4$, 因为 $4^3 = 64 \leq 100 < 125 = 5^3$ 。整点时 floor 等于自身, 非整点时严格小于。

跟着做一遍

半开放例: 令 $x_i = d_{G^2}(v_i) + 1$ 。先说明 $x_i \geq 1$, 再把式 (1.2) 写成图论求和形式; 圈出“有限”和“分母正”在哪里使用。

先遮住答案, 自己做

分层练习:

L1-1. 求 1, 4, 7 的算术平均与 1, 4 的调和平均。

L1-2. 写出 $s = \lfloor 13.2 \rfloor$ 及两侧界。

L2-1. 用平方非负证明 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, 并判等号。

L2-2. 不用小数, 证明 $5 \leq 20^{2/3} < 6$ 是否成立; 若不成立修正。

L3-1. 给定正数和 $x_1 + \cdots + x_n = S$, 证明倒数和至少 n^2/S , 并说明“所有 x_i 相等”何时可取等号。

核对答案与推理

L3 六层答案. (1) 定义起点为恒等式中每个 $x_i > 0$, 根号和倒数有意义。(2) 展开乘积并减 n^2 , 把对角项消去, 非对角项按 $i < j$ 配对。(3) 每对成为 $(\sqrt{x_i/x_j} - \sqrt{x_j/x_i})^2 \geq 0$ 。(4) 故 $S \sum 1/x_i \geq n^2$, 再除正数 S 得结论。(5) 所有平方同时为零当且仅当每对 $x_i = x_j$; 这给等号。易错是未声明正性。(6) 评分: 正性 1 分、恒等式 2 分、除正数和等号各 1 分。速核: L1-1 为 4 与 $8/5$; L1-2 为 $s = 13$ 且 $13 \leq 13.2 < 14$ 。L2-1 由 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ 。L2-2 不成立; 比较立方: $7^3 = 343 \leq 400 < 512 = 8^3$, 故 $7 \leq 20^{2/3} < 8$ 。

先遮住答案, 自己做

一天后新题: 令 $s = \lfloor 50^{2/3} \rfloor$, 只用整数立方确定 s ; 再验证 $s > 50^{2/3} - 1$ 。

本卡过关门

☐ 能从有限求和推平均; ☐ 能证明 AM-HM 与 AM-GM; ☐ 会检查正性与等号;
☐ 能用 floor 两侧界。信心 ____/5。

1.12 Z12 数列、极限、上确界与夹逼

学完本卡，你应该能做到

目标：用“任意精度最终满足”理解极限；区分最大值与上确界；从有限对象列安全地取下界并用夹逼定极限。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 数列 $1/k$ 前四项是什么？错则回 Z03。(2) $0.9, 0.99, 0.999$ 是否已有一项等于 1？错则读“接近不等于取到”。(3) 若 $a \leq x \leq a$ ，则 x 为何？错则回 Z08。

数列 $a_k \rightarrow L$ 的精确意思是：对每个精度 $\varepsilon > 0$ ，都存在整数 K ，使 $k \geq K$ 时恒有 $|a_k - L| < \varepsilon$ 。它只谈所有足够靠后的有限项，不创造“第无穷项”。

设 S 非空且至少有一个上界。它的上界 U 满足所有 $x \in S$ 都有 $x \leq U$ 。上确界 $s = \sup S$ 还要求它是最小上界；等价地，必须同时满足两件事：**(i)** $x \leq s$ 对每个 $x \in S$ 成立；**(ii)** 对每个 $\varepsilon > 0$ ，存在 $x \in S$ 使 $x > s - \varepsilon$ 。上确界可以不在集合中。

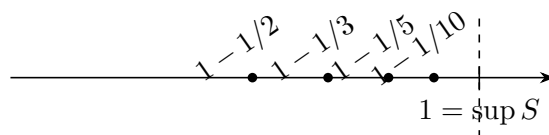


图 Z12-1: $S = \{1 - 1/k : k \geq 1\}$ 的点越来越靠近 1，但没有一点等于 1。

若 $\ell_\Delta \leq a_\Delta \leq u_\Delta$ ，且上下界都趋于同一个 L ，则 $a_\Delta \rightarrow L$ ，这叫夹逼。

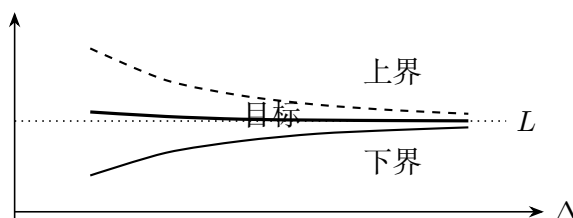


图 Z12-2: 上下挡板共同靠近 L ，目标无处可逃；线型保证黑白可辨。

跟着做一遍

完整例 A: $a_k = 2 + 1/k$ 每项大于 2，但 $a_k \rightarrow 2$ ；取 $K > 1/\varepsilon$ 即可使 $|a_k - 2| = 1/k < \varepsilon$ 。

跟着做一遍

完整例 B (上确界边界): $S = \{1 - 1/k : k \geq 1\}$ 无最大值却有上确界 1。任取 $\varepsilon > 0$ ，选 $k > 1/\varepsilon$ ，便有 $1 - 1/k > 1 - \varepsilon$ 。

跟着做一遍

半开放例: 若每个有限 k 的图给值 $g_k = \phi - 2/k$ ，自行证明 $\sup_k g_k = \phi$ ；特别说明为什么不能写“取 $k = \infty$ ”。

先遮住答案，自己做

分层练习：

L1-1. 给 $\varepsilon = 0.01$ ，找 K 使 $k \geq K$ 时 $1/k < \varepsilon$ 。

L1-2. 求 $\{2 - 1/k : k \geq 1\}$ 的上确界与最大值情况。

L2-1. 证明常数列 $a_k = 7$ 趋于 7。

L2-2. 若 $0 \leq a_k \leq 3/k$ ，证明 $a_k \rightarrow 0$ 。

L3-1. 若每个有限图 G_k 都属于定义 c_Δ 的图类，且其归一化差 $g_k \rightarrow \phi_\Delta$ ，证明 $c_\Delta \geq \phi_\Delta$ ，但不声称上确界被取到。

核对答案与推理

L3 六层答案。 (1) c_Δ 是全部合格有限图取值集合 S_Δ 的上确界。(2) 每个 $g_k \in S_\Delta$ ，故由上界定义 $g_k \leq c_\Delta$ 。(3) 反设 $c_\Delta < \phi_\Delta$ ，取 $\varepsilon = (\phi_\Delta - c_\Delta)/2 > 0$ 。(4) 极限定义给充分大 k 时 $g_k > \phi_\Delta - \varepsilon > c_\Delta$ ，矛盾。(5) 因此 $c_\Delta \geq \phi_\Delta$ ；证明只用有限 k ，未制造无限图，也未证明等号或达到。(6) 评分：集合归属 1 分、上界 1 分、精度反证 2 分、边界声明 1 分。
速核：L1-1 可取 $K = 101$ (100 时等于而非小于)；L1-2 上确界 2，无最大值。常数列取任意 $K = 1$ ；夹逼题上下界都趋零。

先遮住答案，自己做

一天后新题：证明 $3 - 4/k$ 的上确界是 3。要求同时完成“3 是上界”和“任意 ε 内可逼近”两半。

本卡过关门

☐ 能用 ε, K 语言解释极限； ☐ 区分上确界与最大值； ☐ 不使用无限图； ☐ 能写夹逼的上下两边。信心____/5。

1.13 Z13 大 O 记号、渐近等价、下极限与上极限

学完本卡，你应该能做到

目标：解码 $O(\cdot)$ 的量词；区分逐项相等与首阶等价；用尾部上下界理解 $\liminf, \limsup$ 。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) $1/\Delta^2$ 与 $1/\Delta$ 谁衰减更快？错则列数表。(2) 普通极限是否要求每项等于极限？错则回 Z12。(3) 找 $0, 1, 0, 1, \dots$ 的尾部最小和最大水平；不确定则学习本节。

$h_\Delta = O(\Delta^{-1/3})$ 表示存在常数 $C > 0$ 与起点 Δ_0 ，对所有 $\Delta \geq \Delta_0$ 有

$$|h_\Delta| \leq C\Delta^{-1/3}.$$

常数必须不随 Δ 变化。 $f_\Delta \sim g_\Delta$ 表示 $f_\Delta/g_\Delta \rightarrow 1$ ，是首阶接近，不是逐项相等。

先补两个不能跳过的新词。一个数集 S 的**下界**是“不超过 S 中每个数”的数；所有下界中最大的那个叫**下确界**，记作 $\inf S$ 。类似地，**上界**不小于 S 中每个数，最小上界叫**上确界**，记作 $\sup S$ 。例如 $S = (0, 1)$ 没有最小元素，但 0 仍是下确界；所以“下确界”不能偷换成“最小值”。

对实数列 a_n ，记第 n 个尾部的下、上水平为

$$p_n = \inf\{a_k : k \geq n\}, \quad q_n = \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

删掉前一项后，尾部可选数变少，故 p_n 只会上升， q_n 只会下降，而且每个 $k \geq n$ 都满足

$$p_n \leq a_k \leq q_n.$$

在本书出现的有界数列中，这两个单调数列都有有限极限；分别定义为 $\liminf a_n$ 与 $\limsup a_n$ ：

$$\liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k, \quad \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

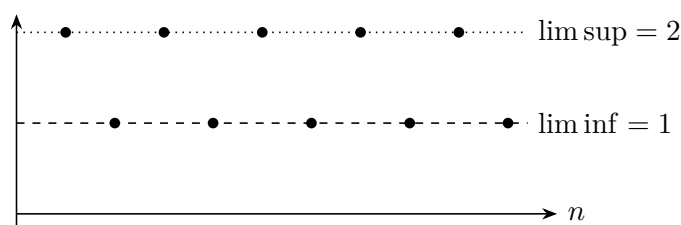
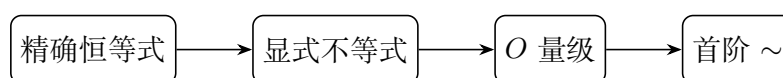


图 Z13-1：摆动列没有普通极限，但尾部始终在 1 与 2 两层触及。



箭头向右会丢信息

一般不能反推

图 Z13-2：渐近语言的信息层级； O 不给最佳常数， $\sim$ 不给二阶项。

跟着做一遍
完整例 A： $1/\Delta + 1/\Delta^2 \sim 1/\Delta$ ，因为比值 $1 + 1/\Delta \rightarrow 1$ ；但二者没有任何一项相等。
跟着做一遍
完整例 B（摆动边界）： $a_n = 0, 1, 0, 1, \dots$ 有 $\liminf = 0, \limsup = 1$ ，所以普通极限不存在。
跟着做一遍
半开放例： 从 $0 \leq 1 - \Delta\phi_\Delta \leq 6\Delta^{-1/3}$ 推出 $1 - \Delta\phi_\Delta = O(\Delta^{-1/3})$ ，再用夹逼推出 $\Delta\phi_\Delta \rightarrow 1$ 。标出每一步丢失了哪些精确信息。
为什么这一步是真的
上下极限相遇为何推出普通极限。 若 $\liminf a_n \geq L$ 且 $\limsup a_n \leq L$ ，先由总有 $\liminf \leq \limsup$ 得二者都等于 L 。任给 $\varepsilon > 0$ ，由 $p_n \rightarrow L$ 可取 N_1 使 $p_n > L - \varepsilon$ ($n \geq N_1$)；由

$q_n \rightarrow L$ 可取 N_2 使 $q_n < L + \varepsilon$ ($n \geq N_2$)。取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 。对每个 $k \geq N$ ，尾部夹法给

$$L - \varepsilon < p_N \leq a_k \leq q_N < L + \varepsilon.$$

这正是 $a_k \rightarrow L$ 的定义。这里被夹的是同一个尾部里的每一项，不是只夹两个抽象符号。

先遮住答案，自己做

分层练习：

L1-1. 证明 $5/\Delta^2 = O(1/\Delta)$ ，给出 C, Δ_0 。

L1-2. 求 $2 + (-1)^n$ 的 $\liminf, \limsup$ 。

L2-1. 判断 $1/\Delta = O(1/\Delta^2)$ 是否成立，并用量词反驳。

L2-2. 证明 $1 + (-1)^n/n$ 的普通极限、上下极限都为 1。

L3-1. 证明若 $\liminf a_n \geq L$ 且 $\limsup a_n \leq L$ ，则 $a_n \rightarrow L$ 。

核对答案与推理

L3 六层答案。 (1) 定义尾部水平 $p_n = \inf_{k \geq n} a_k, q_n = \sup_{k \geq n} a_k$ ，且对每个 $k \geq n$ 有 $p_n \leq a_k \leq q_n$ 。(2) 对任意列总有 $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ ；已知给出 $L \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq L$ 。(3) 因而二者都等于 L 。(4) 任给 $\varepsilon > 0$ ，按上面的 why 框取 N ，对所有 $k \geq N$ 得 $L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon$ ，故普通极限存在且为 L 。(5) 易错是直接写“夹逼”而不指出 $p_N \leq a_k \leq q_N$ ；可用摆动列复核：上下极限不等时不能推出。(6) 评分：尾部定义与逐项夹法 2 分、链式夹等 2 分、 ε 量词与结论 2 分。

速核：L1-1 对 $\Delta \geq 1$ 有 $5/\Delta^2 \leq 5/\Delta$ ，取 $C = 5, \Delta_0 = 1$ ；L1-2 为 1 与 3。L2-1 不成立，因为若 $1/\Delta \leq C/\Delta^2$ 最终成立，则 $\Delta \leq C$ 最终成立，矛盾。L2-2 用 $|(-1)^n/n| = 1/n \rightarrow 0$ 。

先遮住答案，自己做

一天后新题：求序列 $a_n = 3 + (-1)^n + 1/n$ 的上下极限；它有普通极限吗？必须使用尾部水平而非只看前四项。

本卡过关门

☐ 能完整写 O 的三个量词对象； ☐ 能区分 O 与 $\sim$ ； ☐ 会从尾部求上下极限； ☐ 会用两者夹出普通极限。信心____/5。

1.14 Z14 有限概率、期望、指示变量与概率方法

学完本卡，你应该能做到

目标：从有限等可能结果定义概率；把期望当加权平均；证明期望的线性并推出“至少一个结果达到平均”。

先遮住答案，自己做

人口诊断：(1) 三个不同物体有多少种排列？错则回 Z06。(2) 六个等可能结果中两种成功，概率多少？错则读“样本空间”。(3) 一组数平均为 5，能否每个都小于 5？不确定则回 Z11。

有限样本空间 Ω 列出所有可能结果。每个结果的概率非负，且总和为 1；等可能时，每个结果的概率都是 $1/|\Omega|$ ，事件 A 的概率便是 $|A|/|\Omega|$ 。随机变量 X 给每个结果 ω 一个数 $X(\omega)$ ；期望是加权平均

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr(\omega).$$

指示变量 I_A 在事件发生时取 1，否则取 0，因此 $\mathbb{E}[I_A] = \Pr(A)$ 。

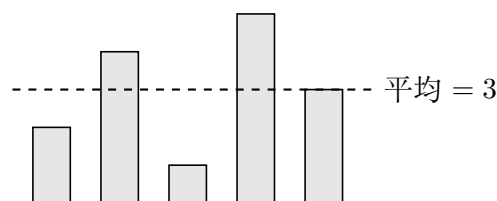
排列	abc	acb	bac	bca	cab	cba
a 最早?	1	1	0	0	0	0

图 Z14-1：六个等可能排列中两次成功，所以 $\Pr(a \text{ 最早}) = 2/6 = 1/3$ 。

无论随机变量是否独立，有限和总满足

$$\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]. \quad (1.4)$$

这是因为把两边都展开成有限双重和后只交换求和次序。若某随机变量期望为 a ，至少有一个结果使 $X \geq a$ ；否则每个结果都小于 a ，加权平均也小于 a 。



若平均是 3，至少一根柱高不低于 3

图 Z14-2：概率方法先证平均，再选取一项达到平均；它是存在性证明，不是随机答案。

跟着做一遍

完整例 A：公平六面骰点数期望为 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3.5$ 。没有一面写 3.5，说明期望不必是可取值。

跟着做一遍

完整例 B (随机排列)：在 v 与其 d 个邻居组成的 $d+1$ 个对象中，每个对象同样可能最早，所以 v 最早的概率为 $1/(d+1)$ ；不需要其他顶点排列彼此独立。

跟着做一遍

半开放例：给每个顶点 v 定义 $I_v = 1$ 当且仅当 v 在自己与邻居中最早。写出被选顶点数 $X = \sum_v I_v$ ，再用式 (1.4) 推导 $\mathbb{E}[X] = \sum_v 1/(d(v) + 1)$ 。

先遮住答案，自己做**分层练习：**

L1-1. 两枚公平硬币的四个结果中，恰一枚正面的概率是多少？

L1-2. 随机变量取 0, 2, 4 且各概率 $1/3$ ，求期望。

L2-1. 用有限和直接证明 $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ 。

L2-2. 解释为什么事件不独立也不妨碍期望线性；给两个明显相关的指示变量例子。

L3-1. 在随机排列选点规则中，证明存在一个具体排列至少选中 $\sum_v 1/(d(v) + 1)$ 个点；再说明这句话没有声称每个排列都如此。

核对答案与推理

L3 六层答案。(1) 对每点定义指示变量 I_v ，选中总数 $X = \sum_v I_v$ 。(2) 对固定 v ，局部 $d(v)+1$ 个对象最早位置对称，故 $\mathbb{E}[I_v] = 1/(d(v) + 1)$ 。(3) 期望线性给 $\mathbb{E}[X] = \sum_v 1/(d(v) + 1)$ ，不需独立。(4) 若每个排列的 X 都小于这个平均，平均也会更小，矛盾；故至少一个具体排列达到或超过。(5) 易错是把“存在一个”夸成“每一个”，或把非整数期望当成实际选点数；实际整数会至少为其上取整。(6) 评分：指示变量 1 分、局部概率 1 分、线性 1 分、平均存在性与边界各 1 分。

速核：硬币结果 HT, TH 两个，概率 $1/2$ ；第二题期望 2。L2-1 把 $\sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega))p(\omega)$ 分开。相关例：一枚硬币“正面”与“反面”两个指示变量互斥，但线性仍成立。

学术边界

导数是可选旁支，不是本书主线前提。论文某处可用导数寻找峰顶：导数正表示局部上升，负表示局部下降，从正变负处是最大值候选。但卡 50 的核心优化可以用 Z11 的 AM-GM、平方非负或配方完成。未学微积分者先走代数路线；作者最终只需能核对论文中的标准求导式，而不依赖它发现结论。

先遮住答案，自己做

一天后新题：四个对象随机排列。固定对象 a 最早的概率是多少？把 24 个排列全部列出不是必需的；用对称性论证，并给一个小型枚举复核。

本卡过关门

☐ 能列有限样本空间； ☐ 能把期望解释为加权平均； ☐ 会用指示变量和线性； ☐ 能从平均推出存在而不夸大。信心____/5；任何一项失败，回退图 Z14-1 或六层答案。

1.15 预备篇总过关门：进入卡 01 前的闭卷考试

先遮住答案，自己做

请在 60 分钟内闭卷完成，答案另纸书写：

1. 写出一个含 $\forall, \exists$ 的两层命题及其正确否定。
2. 给一张五顶点图写 V, E, n, m 、度序列、 Δ ，用握手引理复核。
3. 在该图上计算三组距离，判连通与直径；给出一个 packing 候选并查两两距离。
4. 对某个选点集合计算所有边的指纹，指出是否覆盖并区分。
5. 用“构造 + 排除”证明一个最小值或最大值恰为某整数。
6. 从 $\tau_D + \rho = n$ 推出 Z_{10} 的 deficit 形式，并解释 $\mu < 0$ 。
7. 证明 AM-HM，计算一个 floor，两条都要写正性或单调性依据。
8. 证明 $\sup\{1 - 1/k : k \geq 1\} = 1$ ，不得写 $k = \infty$ 。
9. 给出一个没有普通极限的数列，求其 $\liminf, \limsup$ ；完整写一个 O 声明的量词。
10. 用指示变量和期望证明一个有限概率存在性结论。

本卡过关门

进入卡 01 的硬门：

1. 十题至少八题完全正确，且第 2、5、6、7、8、10 题不得为零分；
2. 随机抽一题换数字后仍能独立完成；
3. 能在十分钟内口述“有限图对象 $\rightarrow$ 参数 $\rightarrow$ 不等式 $\rightarrow$ 反例/极限”的证据链；
4. 自评信心至少 $3/5$ ，并写出三条真实错因、发现方式和回退单元；
5. 一天后重做第 6、8、10 题的不同数据版。任一失败，不勾选总门。
6. 七天后闭卷完成下方“Z 先修复测 A 卷”，第 2、4、6、7、8 题不得为零分；失败按题后路由返回对应 Z 卡，并在一天后用 B 卷同型换数重测。

先遮住答案，自己做

七天后 Z 先修复测 A 卷（完整独立题面，45 分钟）。

1. 否定命题“对每个整数 n ，都存在整数 $m > n$ ”，量词、范围与不等号都要改对。
2. 对 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 、 $E = \{12, 13, 23, 34, 45\}$ ，求 n, m 、度序列、 Δ ，用握手引理复核；再求直径。
3. 在第 2 题图中证明 $S = \{1, 5\}$ 是 packing，并令 $T = V \setminus S$ ，列出全部边指纹。
4. 从整数 $1, \dots, 6$ 中选两两不相邻的数，用“构造 + 排除”证明最多能选三个。

5. 对第 2 题图, 已知 $\rho = 2$, 用补集恒等式和 deficit 形式求 τ_D, μ , 再用原始余量式复核。
6. 不用计算器确定 $\lfloor 20^{2/3} \rfloor$; 再以 2, 8 为例同时计算算术平均与调和平均并比较。
7. 证明 $\sup\{4 - 3/k : k \geq 1\} = 4$, 不得写“取 $k = \infty$ ”。
8. 对 $a_n = 2 + (-1)^n$ 求 $\liminf, \limsup$ 并判断普通极限; 再用完整量词证明 $1/n^2 = O(1/n)$ 。
9. 公平六面骰掷一次, 令 $I = 1$ 表示点数至少四, 否则 $I = 0$ 。求 $\Pr(I = 1)$ 与 $\mathbb{E}[I]$, 并说明这里没有使用无限样本。

自校验键与失败路由。 (1) $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, m \leq n$; 错回 Z01。 (2) 度数依次为 2, 2, 3, 2, 1, 和为十, 故 $n = 5, m = 5, \Delta = 3$; 直径三; 错回 Z04–Z07。 (3) $\text{dist}(1, 5) = 3$; $T = \{2, 3, 4\}$; 边 12, 13, 23, 34, 45 的指纹为 $\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4\}$; 错回 Z02、Z07 或卡 02–05。 (4) 构造 $\{1, 3, 5\}$; 三组 $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$ 每组至多选一, 故至多三; 错回 Z08。 (5) $\tau_D = 3$; $\mu = 10 \cdot 2 - (4 \cdot 5 - 10) = 10$; 原式 $3 \cdot 2 \cdot 5 + 10 - 10 \cdot 3 = 10$; 错回 Z09–Z10。 (6) 因 $7^3 = 343 \leq 400 < 512 = 8^3$, floor 为七; 算术平均五、调和平均 $16/5$, 故前者较大; 错回 Z11。 (7) 四是上界; 给定 $\varepsilon > 0$, 取整数 $k > 3/\varepsilon$, 则 $4 - 3/k > 4 - \varepsilon$; 错回 Z12。 (8) 上下极限为一、三, 普通极限不存在; 取 $C = 1, N = 1$, $n \geq N$ 时 $1/n^2 \leq C/n$; 错回 Z13。 (9) 两者均为 $3/6 = 1/2$; 样本只有六个等可能结果; 错回 Z14。

第二部分

从定义到第一个反例

第二章 第一篇：对象、互补与余量

这一篇先回答四个问题：我们研究的“图”究竟是什么？怎样选点才能同时覆盖并区分每条边？这种选点与“彼此隔得足够远”的选点有什么互补关系？最后，怎样用一个整数的正负判断猜想是否被违反？

2.1 卡 01：研究对象与边界约定

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能独立画一张有限简单无向图，写出它的顶点集、边集、阶、边数、各点度数和实际最大度；还能解释不同连通分量之间为何把距离记为 $+\infty$ ，以及为何约定空图的最大度为零。

前置知识：零基础预备篇中“集合”“图”“计数”“距离”四节。**人口自测（先闭卷）：**(1) $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $d_G(v)$ 分别表示什么？(2) 路径 $a-b-c$ 有几个顶点、几条边， b 的度是多少？(3) 两个顶点分属不同连通分量时，二者距离记作什么？**失败路由：**第 (1) 题错回预备篇“集合与图”；第 (2) 题错回“度与计数”；第 (3) 题错回“距离与连通”。三题全对再开始本卡。

新词与符号

本章第一次出现的符号如下。

写法	读法	含义
G	图 G	整张点线结构的名称
$V(G)$	G 的顶点集	图中全部点组成的集合
$E(G)$	G 的边集	图中全部边组成的集合
$n = V(G) $	n 等于顶点集大小	图的阶，即顶点数
$m = E(G) $	m 等于边集大小	图的边数
$d_G(v)$	v 在 G 中的度	与 v 相接的边数
$\Delta(G)$	德尔塔 G	所有顶点度数中的最大值
$\text{dist}_G(u, v)$	u, v 在 G 中的距离	从 u 到 v 至少经过的边数

先讲人话

把房间看成点，把两间房之间的门看成线。图论不关心房间画在纸的左边还是右边，只关心哪些房间之间真的有门。若两群房间之间完全没有门，便像两座互不相通的岛。

再讲精确

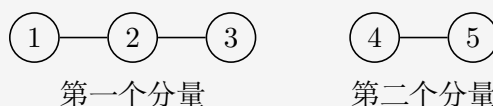
本论文中的图一律是：**有限**（只有有限多个点和边）、**简单**（没有自己连自己的环，也没有同一点之间的重复边）、**无向**（边没有箭头）。不同连通分量中的点之间没有任何有限长度的路，约定其距离为 $+\infty$ 。空图是 $V(G) = \emptyset$ 的图；它没有顶点也没有边，约定 $\Delta(G) = 0$ 。

跟着做一遍

令

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E(G) = \{12, 23, 45\}.$$

这里 12 表示端点为 1, 2 的一条无向边。



逐项数得 $n = 5, m = 3$ ；度数依次为 1, 2, 1, 1, 1，所以实际最大度 $\Delta(G) = 2$ 。 $\text{dist}_G(1, 3) = 2$ ，而 $\text{dist}_G(1, 5) = +\infty$ 。

跟着做一遍

半开放例 B. 令 $V = \{a, b, c, d\}$ 、 $E = \{ab, bc, ca\}$ 。先不看下句，填空： $n = \underline{\quad}$ ， $m = \underline{\quad}$ ；度数为 $d(a) = \underline{\quad}$ 、 $d(b) = \underline{\quad}$ 、 $d(c) = \underline{\quad}$ 、 $d(d) = \underline{\quad}$ ； $\Delta = \underline{\quad}$ ， $\text{dist}(a, d) = \underline{\quad}$ 。自检时应满足度数和等于 $2m$ ，且孤立点 d 与三角形不在同一分量。

为什么这一步是真的

为什么强调“实际”最大度？因为 $\Delta(G)$ 是图造好以后真正出现的最大度数。上例中每个度数当然都“不超过 7”，但这不能把 $\Delta(G)$ 写成 7；真正最大值是 2。空图没有可供取最大值的度数，为了让零阶图也能统一进入计算枚举，论文明确约定它的最大度为零。

最容易掉进去的坑

- $+\infty$ 不是“某个特别大的整数”，而是“根本不存在有限路”的记号。
- 图画得交叉不等于多了一个顶点；只有明确标出的点才是顶点。
- “所有度数都不超过 5”只给上界，不能证明实际最大度等于 5；还必须找到一个度数真的为 5 的顶点。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对路径 $a-b-c-d$ ，写出 n, m 、四个度数和 Δ ，并求 $\text{dist}(a, d)$ 。

L1-2 换数字。三角形 $x-y-z-x$ 外再放一个孤立点 w 。写出 n, m 、四个度数、 Δ 与 $\text{dist}(x, w)$ 。

L2-1 迁移。自画一张六顶点、恰有两个连通分量的简单无向图；写出 V, E, n, m, Δ ，并各举一对距离有限和距离为 $+\infty$ 的点。

L2-2 换表示。已知 $V = \{a, b, c, d\}$ 、 $E = \{ab, bc, cd, da, ac\}$ 。求 n, m 、各点度数、实际 Δ 与 $\text{dist}(b, d)$ ，并用握手引理复核边数。

L3 解释。判断并纠正：“空图所有顶点的度数都是零，所以一定存在一个度数为零的顶点。”

核对答案与推理

L1-1: $n = 4, m = 3$ ，度数依次为 1, 2, 2, 1，故 $\Delta = 2$ ；从 a 到 d 最短要走三条边，距离为 3。

L1-2: $n = 4, m = 3$ ； x, y, z 的度都是 2， w 的度是 0，故 $\Delta = 2$ ； x, w 分属不同分量，所以 $\text{dist}(x, w) = +\infty$ 。

L2-1 示例:取 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $E = \{12, 23, 31, 45, 56\}$ 。前三点构成三角形，后三点构成三点路径； $n = 6, m = 5$ ，度数为 2, 2, 2, 1, 2, 1，所以 $\Delta = 2$ 。 $\text{dist}(4, 6) = 2$ ， $\text{dist}(1, 4) = +\infty$ 。其他满足要求的画法也可接受。

L2-2 六层答案。

- 结果:** $n = 4, m = 5$ ； $d(a), d(b), d(c), d(d) = (3, 2, 3, 2)$ ，故 $\Delta = 3$ ，且 $\text{dist}(b, d) = 2$ 。
- 定义起点:** $n = |V|$ 、 $m = |E|$ ；度是与顶点相接的边数，距离是最短路长度。
- 合法性:** 五个无序顶点对互不重复且没有自环，确为简单图的五条边；路径 $b-a-d$ （或 $b-c-d$ ）长为 2，而 $bd \notin E$ ，所以最短距离恰为 2。
- 最易错处:** 边 ac 同时给 a, c 各增加一次度，不能漏计；图上画线交叉也不会自动增加顶点。
- 独立复核:** 度数和为 $3 + 2 + 3 + 2 = 10 = 2m$ ，与握手引理一致。
- 评分与最低表述:** 结果 2 分，四个度数与实际最大度 2 分，距离的“有长 2 路且无边 bd ”2 分，握手复核 1 分；最低合格表述必须同时写出达到 $\Delta = 3$ 的顶点和距离为何不是 1。

L3: 错。空图一个顶点也没有，所以不能说“存在一个”零度顶点。 $\Delta(\emptyset) = 0$ 是人为约定，用于统一公式和枚举边界，不是从某个顶点取到的最大值。

本卡过关门

合上讲义，自画一张六点图并在两分钟内写出 n, m, Δ ；口头说明“不同分量距离为 $+\infty$ ”和“空图最大度约定为零”。三项都正确才通过卡 01。一天后换一张图重做，不许沿用本卡数字。

对应交互审查卡：01 | 研究对象和边界约定

2.2 卡 02: identifying vertex cover: 给每条边一个不同指纹

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能按定义检查一个顶点集合是否为 identifying vertex cover (识别顶点覆盖)，能在小图上逐边写出指纹，并能同时证明“可行”和“最小”。

前置知识：卡 01 与预备篇集合运算。**人口自测 (先闭卷)：**(1) 若 $e = \{2, 3\}$ 、 $T = \{1, 3, 4\}$ ，求 $e \cap T$ ；(2) 简单无向图的一条边有几个不同端点？(3) “ $T \subseteq V(G)$ ”表示什么？**失败路由：**第 (1)、(3) 题错回预备篇“集合”；第 (2) 题错回卡 01 的简单图约定。三题全对再继续。

新词与符号

$T \subseteq V(G)$ 读作“ T 是顶点集的子集”。在简单无向图中，一条边 $e = \{u, v\}$ 本身就是由两个不同端点组成的二元素集合，所以可以计算 $e \cap T$ 。它读作“边 e 与 T 的交集”，本卡把它叫作边 e 在 T 上留下的**指纹**，也常称 trace (迹)。 $\tau_D(G)$ 读作“tau 下标 D 的 G ”，表示最小识别顶点覆盖的大小。

先讲人话

把边想成三个来登记的小队，每队有两个队员。你在一些顶点上安装打卡器，某条边的“指纹”就是它的两个端点中哪些装了打卡器。每队至少要打到一个卡，而且不同队留下的名单必须不同。

再讲精确

集合 $T \subseteq V(G)$ 是识别顶点覆盖，当且仅当同时满足：

1. **覆盖：**对每条边 $e \in E(G)$ ，都有 $e \cap T \neq \emptyset$ ；
2. **识别：**对任意两条不同边 $e \neq f$ ，都有 $e \cap T \neq f \cap T$ 。

满足这两条的 T 中，大小最小者的大小记作 $\tau_D(G)$ 。

跟着做一遍

看四点路径 $P_4: 1-2-3-4$ 。取 $T = \{2, 3\}$ ，三条边的指纹为

$$12 \cap T = \{2\}, \quad 23 \cap T = \{2, 3\}, \quad 34 \cap T = \{3\}.$$

三个指纹都非空且互不相同，所以 T 可行。一个点不可能覆盖路径首尾两条互不相接的边 12 与 34，所以不可能有大小 1 的可行集合。因此 $\tau_D(P_4) = 2$ 。

再看三角形 K_3 。取 $T = \{1, 2\}$ ，三条边的指纹是 $\{1, 2\}, \{2\}, \{1\}$ ，也全部不同。因此“两个相邻端点都在 T 中”并不会自动造成冲突。

跟着做一遍

半开放例 B. 在 $P_3: 1-2-3$ 中取 $T = \{1, 2\}$ 。补全

$$12 \cap T = \underline{\hspace{2cm}}, \quad 23 \cap T = \underline{\hspace{2cm}}.$$

再依次检查“都非空”“彼此不同”，最后在横线上写“是/不是识别顶点覆盖”：_____。
自检时必须分别点名覆盖条件和识别条件。

为什么这一步是真的

证明 $\tau_D(G) = k$ 必须走两步：先构造一个大小为 k 的可行 T ，得到 $\tau_D(G) \leq k$ ；再证明任何更小的集合都失败，得到 $\tau_D(G) \geq k$ 。只列一个成功集合，不能证明它最小。

最容易掉进去的坑

- 只覆盖不够。例如 P_3 中 $T = \{2, 4\}$ 覆盖每条边，但边 $12, 23$ 的指纹都为 $\{2\}$ 。
- 只让指纹不同也不够；空指纹表示那条边根本没被覆盖。
- identifying vertex cover 区分的是边，不要把它混成给顶点编码的 identifying code。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。 在三角形 K_3 中检查 $T = \{1, 3\}$ ，逐边写出指纹。

L1-2 换图。 在 $P_3: 1-2-3$ 中检查 $T = \{1, 2\}$ ，逐边写出指纹并作出可行性判断。

L2-1 迁移。 对 $P_5: 1-2-3-4-5$ ，证明 $T = \{2, 3, 4\}$ 可行，并证明没有大小 2 的识别顶点覆盖。

L2-2 换结构。 对四点圈 $C_4: 1-2-3-4-1$ ，证明 $T = \{1, 2, 3\}$ 可行，并证明任何大小 2 的集合都不可能可行，从而求 $\tau_D(C_4)$ 。

L3 解释/反例。 给出一个“是普通顶点覆盖、但不是识别顶点覆盖”的最小熟悉例子，并指出重复的指纹。

核对答案与推理

L1-1: 边 $12, 23, 31$ 的指纹依次为 $\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}$ ，都非空且不同，所以可行。

L1-2: $12 \cap T = \{1, 2\}$ 、 $23 \cap T = \{2\}$ ；两指纹非空且不同，所以 T 可行。

L2-1: 四条边 $12, 23, 34, 45$ 的指纹依次为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4\}$ ，故 T 可行。若只选两点，为覆盖首边 12 必须选 1 或 2，为覆盖末边 45 必须选 4 或 5。四种组合中只有 $\{2, 4\}$ 还能覆盖中间两边；但它使 $12, 23$ 都留下 $\{2\}$ （同时 $34, 45$ 都留下 $\{4\}$ ），所以失败。因此最小值为 3。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** $T = \{1, 2, 3\}$ 可行，且 $\tau_D(C_4) = 3$ 。
2. **定义起点：** 逐边指纹必须全部非空且两两不同；要证最小值还须排除更小集合。
3. **合法性：** 四条边 $12, 23, 34, 41$ 的指纹依次为 $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{1\}$ ，故给出上界 3。大小 0 或 1 显然不能覆盖四条圈边；若大小为 2，两点相邻时对面的边未覆盖，两点相

对时相邻于同一未选点的两条边留下同一单点指纹。因此大小 2 也失败。

4. **最易错处：**只列出成功的三点集合只能证明 $\tau_D \leq 3$ ，不能直接宣布等号。
5. **独立复核：**圈的二点子集只有“相邻”与“相对”两种同构类型，上述分类已经穷尽全部六个二点集合。
6. **评分与最低表述：**四个正确指纹 2 分，两类二点集合的失败理由各 2 分，结论 1 分；最低合格表述必须出现“相邻漏边、相对重指纹”这两个关键词。

L3：最小例子是三点路径 $P_3: 1-2-3$ 。取普通顶点覆盖 $T = \{2\}$ ，两条边都被碰到，但 $12 \cap T = 23 \cap T = \{2\}$ ，所以它不是识别顶点覆盖。两点图 K_2 只有一条边，没有两条边可产生重复指纹，因此 P_3 在顶点数意义下最小。

本卡过关门

闭卷写出定义中的两个量词条件；在一张新的四边小图上逐边列表检查；最后同时给出最小值的“可行构造”和“更小不可能”两段理由。不能把普通顶点覆盖当答案。通过后才勾卡 02。

一天后复测（不同题）：不看本卡，在三叶星图 $K_{1,3}$ 上只用指纹定义求 τ_D ；答案必须包含一个可行集合和对所有二点集合失败的分类说明。

对应交互审查卡：02 | identifying vertex cover 的定义

2.3 卡 03：packing：彼此至少隔三步的选点

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能判断一个集合是否为 packing（打包集），能在路径和圈上求最大 packing 大小，并能解释“互不相邻”为什么还不够。

前置知识：卡 01 的距离概念。**人口自测（先闭卷）：**(1) 路径 $1-2-3-4$ 中 1,3 的距离是多少？(2) 不同连通分量中的两点距离记作什么？(3) 要证明一个数是某参数的最大值，必须分别证明哪两个方向？**失败路由：**第 (1)、(2) 题错回卡 01/预备篇“距离”；第 (3) 题错回预备篇“最值的构造与排除”。

新词与符号

packing 译作“打包集”。若 $S \subseteq V(G)$ 中任意两个不同顶点的距离都至少为 3，则 S 是 packing。最大可能大小记为 $\rho(G)$ ； ρ 是希腊字母 rho，读作“柔”或“罗”。“两两距离至少三”写作

$$u \neq v, u, v \in S \implies \text{dist}_G(u, v) \geq 3.$$

先讲人话

在地图上放会互相干扰的无线电台。相邻（一步）会干扰，中间隔一个点（两步）仍会干扰；至少隔三步才允许同时放。不同岛之间永远走不到，距离记为 $+\infty$ ，当然也满足“至少三”。

再讲精确

packing 的条件比“独立集”更强。独立集只禁止距离 1；packing 同时禁止距离 1 和距离 2。 $\rho(G)$ 是一个最大化参数：要证明 $\rho(G) = k$ ，既要构造 k 个合格顶点，又要证明不能选 $k+1$ 个。

跟着做一遍

在 $P_5: 1-2-3-4-5$ 中， $\{1,4\}$ 是 packing，因为距离为 3； $\{1,3\}$ 虽然两个点不相邻，却不是 packing，因为距离只有 2。任意三个被选点按从左到右排列，前后总跨度至多 4 条边；若相邻两个被选点都至少隔 3 条边，总跨度至少 6，矛盾。所以 $\rho(P_5) = 2$ 。

跟着做一遍

半开放例 B。 在 $P_7: 1-2-3-4-5-6-7$ 中尝试 $S = \{1,4,7\}$ 。填出两段关键距离： $\text{dist}(1,4) = \underline{\quad}$ 、 $\text{dist}(4,7) = \underline{\quad}$ ，据此先得到 $\rho(P_7) \geq \underline{\quad}$ 。若想再加第四点，相邻两个被选点之间至少需要三条边；请用总长度只有 6 条边完成“至多”论证。

为什么这一步是真的

在六点圈 C_6 中可选两个相对点，例如 $\{1,4\}$ 。若想选三个，沿圆周三段间隔的边数都至少为 3，总计至少 9 条边，但整个圈只有 6 条边。因此至多两个， $\rho(C_6) = 2$ 。

最容易掉进去的坑

- “没有边连着所选两点”只说明距离不为 1，可能仍为 2。
- 找到两个合格点只给 $\rho \geq 2$ ，还没给 $\rho \leq 2$ 。
- 距离必须在原图中算最短路，不能只沿你画出的某一条绕远路线算。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。 在 $P_6: 1-2-3-4-5-6$ 中找一个大小 2 的 packing，并说明为什么 $\{1,3\}$ 不行。

L1-2 换图。 在七点圈 C_7 中找一个大小 2 的 packing，并说明 $\{1,3\}$ 为什么失败。

L2-1 迁移。 求 $\rho(P_6)$ 与 $\rho(C_6)$ ，每个都写出“至少”和“至多”。

L2-2 分量迁移。 图 G 由一条四点路径 $1-2-3-4$ 和一个孤立点 x 组成。求 $\rho(G)$ ，并把“构造下界”和“排除更大集合”分开写。

L3 解释。 两个互不连通的三角形组成一张图。最大 packing 是多少？为什么不同分量约定距离 $+\infty$ 很方便？

核对答案与推理

L1-1: $\{1, 4\}$ 或 $\{2, 5\}$ 都可行; $\text{dist}(1, 3) = 2 < 3$, 故 $\{1, 3\}$ 不行。

L1-2: 例如 $\{1, 4\}$ 可行, 两点在圈上的最短距离为 3; $\text{dist}(1, 3) = 2 < 3$, 故 $\{1, 3\}$ 失败。

L2-1: 两者均为 2。 P_6 可选 $\{1, 4\}$; 若选三点, 从最左到最右至少需要两个长度 3 的间隔, 即至少 6 条边, 但 P_6 只有 5 条边。对 C_6 , 相对的两点 $\{1, 4\}$ 给出下界 $\rho(C_6) \geq 2$; 若选三个点, 它们沿圆周依次切出的三段都至少含 3 条边, 总数至少为 9, 但 C_6 总共只有 6 条边, 矛盾。因此 $\rho(C_6) \leq 2$, 合起来得到 $\rho(C_6) = 2$ 。

L2-2 六层答案。

1. **结果:** $\rho(G) = 3$ 。
2. **定义起点:** packing 要求任意两个不同选点的距离至少 3; ρ 是其最大大小。
3. **合法性:** 集合 $\{1, 4, x\}$ 中, $\text{dist}(1, 4) = 3$, 而 x 与路径点跨分量, 距离为 $+\infty$, 故是大小 3 的 packing。四点路径内部至多选 2 个, 孤立点所在分量至多贡献 1 个, 所以全图至多选 3 个。
4. **最易错处:** 不能把跨分量距离当成 0, 也不能因画得很远就随意给一个有限距离。
5. **独立复核:** 逐分量最大值相加: $\rho(P_4) = 2$ 、 $\rho(K_1) = 1$, 跨分量点自动相容, 合计 3。
6. **评分与最低表述:** 合法三点构造 2 分, 路径至多 2 的理由 2 分, 孤立分量至多 1 与跨分量距离 2 分, 结论 1 分; 最低合格表述须同时出现“距离 3”和“ $+\infty$ ”。

L3: 每个三角形内部任意两点距离 1, 所以每个分量至多选一个; 从两个分量各选一个可行, 因为跨分量距离是 $+\infty \geq 3$ 。故最大值为 2。这个约定让 packing 定义无需另写“不同分量自动允许”。

本卡过关门

闭卷说出“至少三”排除了哪两种距离; 在新画的 P_7 上求最大 packing 并写上下界; 向一个小学生解释独立集与 packing 的差别。三项都完成才通过卡 03。

一天后复测 (不同题): 在七点圈 C_7 上求 $\rho(C_7)$; 必须给出一个达到集合, 并用圆周间隔总数排除再多选一个点。

对应交互审查卡: 03 | packing 的定义

2.4 卡 04: 补集引理正向: 识别顶点覆盖之外一定是 packing**学完本卡, 你应该能做到**

学完本卡, 你能从识别顶点覆盖 T 出发, 不跳步证明补集 $S = V(G) \setminus T$ 中任意两点距离至少三, 并能指出“相邻”和“共享邻点”分别破坏哪条定义。

前置知识: 卡 02、03, 以及预备篇直接证明/反证法。**人口自测 (先闭卷):** (1) $V \setminus T$ 表示什么?

(2) 识别顶点覆盖的“覆盖”和“识别”两条件分别是什么？(3) packing 同时禁止哪两种有限距离？**失败路由：**第 (1) 题错回预备篇“集合差”；第 (2) 题错回卡 02；第 (3) 题错回卡 03。

新词与符号

$S = V(G) \setminus T$ 读作“ S 等于 $V(G)$ 去掉 T ”。正向要证明的是

$$T \text{ 是识别顶点覆盖} \implies S \text{ 是 packing.}$$

箭头只表示这一方向，暂时不使用反向。

先讲人话

把没有安装打卡器的点放进 S 。如果两个没装机器的点直接相连，那条边没人打卡；如果两个没装机器的点都连向同一个装了机器的点，那么两条边都只打出同一个名字，也分不清。

再讲精确

设 T 是识别顶点覆盖， $S = V(G) \setminus T$ 。我们需排除 S 中两点距离 1 和距离 2。距离 1 就是两点相邻；距离 2 意味着它们有一个公共邻点。

为什么这一步是真的

逐步证明。

1. 假设 $u, v \in S$ 相邻，则边 uv 的两个端点都不在 T 中，所以 $uv \cap T = \emptyset$ 。
2. 这违反“每条边的指纹非空”，故 S 中没有相邻点。
3. 再假设不同的 $u, v \in S$ 有公共邻点 w 。
4. 由第 2 步， w 不可能也在 S ：否则 uw 就是 S 内的一条边。因此 $w \in T$ 。
5. 边 uw 的端点中只有 w 在 T ，故 $uw \cap T = \{w\}$ ；同理 $vw \cap T = \{w\}$ 。
6. 两条不同边得到相同指纹，违反识别条件。因此 S 中两点也不能距离 2。
7. 不同点既不可能距离 1，也不可能距离 2，所以距离至少 3； S 是 packing。

跟着做一遍

在 P_4 中， $T = \{2, 3\}$ ，补集 $S = \{1, 4\}$ 。两点距离正好为 3，所以是 packing。若错误地把 3 也移出 T ， S 中出现相邻点 3, 4，边 34 的指纹立即变空。

跟着做一遍

半开放例 B。在 $P_6: 1-2-3-4-5-6$ 中取 $T = \{2, 3, 5, 6\}$ ，先列指纹核对 T 可行，再填补集 $S = \underline{\hspace{2cm}}$ 。要证明 S 是 packing，只需核对其中两个点的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，因而至少为 3。自检：若某条边指纹为空，应先回查补集是否含相邻点。

最容易掉进去的坑

- 不能直接说“ S 显然是 packing”；必须分别排除距离 1 与 2。
- 公共邻点 w 为何在 T ，依赖先证明 S 独立；顺序不能偷掉。
- 两条边 uw, vw 不同，依赖 $u \neq v$ ；量词必须说“ S 中两个不同顶点”。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。在 K_3 中取 $T = \{1, 2\}$ ，写出补集并验证它是 packing。

L1-2 换图。在 P_5 中取可行集合 $T = \{2, 3, 5\}$ ，求补集，并直接核对补集中不同点的距离。

L2-1 迁移。假设 $u, v \notin T$ 且有公共邻点 w 。完整写出为什么 $w \in T$ ，以及哪两条边得到什么相同指纹。

L2-2 整图应用。在六点圈 $C_6: 1-2-3-4-5-6-1$ 中取 $T = \{2, 3, 5, 6\}$ 。先逐边验证它是识别顶点覆盖，再只用本卡正向引理证明其补集是 packing。

L3 纠错。有人证明：“ T 覆盖每条边，所以 S 中没有相邻点，因此 S 是 packing。”指出缺失的一步，并画最小反例说明“独立”不等于 packing。

核对答案与推理

L1-1: $S = \{3\}$ 。单点集合没有两个不同顶点需要比较，所以自动满足 packing 条件。

L1-2: $S = \{1, 4\}$ ，且 $\text{dist}(1, 4) = 3$ ，所以 S 是 packing。

L2-1: 若 $w \in S$ ，则 uw 是两个端点都在 S 的边，与覆盖条件矛盾，所以 $w \in T$ 。因 $u, v \notin T$ ，有 $uw \cap T = vw \cap T = \{w\}$ ；这两条边因 $u \neq v$ 而不同，却有相同指纹。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** T 可行，补集 $S = \{1, 4\}$ 是 packing。
2. **定义起点：**识别顶点覆盖要求边指纹非空且两两不同；正向补集引理要求从这两条件排除 S 内距离 1 和 2。
3. **合法性：**边 12, 23, 34, 45, 56, 61 的指纹依次为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{5\}, \{5, 6\}, \{6\}$ ，全部非空且不同。故可应用正向引理；也可直接算 $\text{dist}(1, 4) = 3$ 。
4. **最易错处：**不能只说 S 没有相邻点；packing 还要求排除距离 2。
5. **独立复核：**沿圈从 1 到 4 的两条方向都长 3，所以最短距离确为 3；这与引理结论一致。
6. **评分与最低表述：**六个指纹 3 分，补集 1 分，引用引理并点明“排除 1、2” 2 分，独立距离复核 1 分；最低合格表述必须说明指纹“两两不同”，不能只写“都非空”。

L3: 还必须排除 S 中两点距离 2。三点路径 $u-w-v$ 的端点集合 $\{u, v\}$ 是独立集，但两点距离为 2，不是 packing。若它是某个 T 的补集，两条边会在 T 上留下同一单点 $\{w\}$ 。

本卡过关门

红线门：合上书，从“ T 是识别顶点覆盖”开始，完整写出七步证明。审查者可追问：“为什么公共邻点一定在 T ？”并把点名替换。必须即时回答。

一天后不同题：在五点路径 $1-2-3-4-5$ 中取 $T = \{2, 3, 5\}$ 。先列出四条边在 T 上的指纹，确认 T 是识别顶点覆盖，再令 $S = V \setminus T$ ，不用背诵结论而直接验证 S 中两点的距离。最后分别解释：若补集中出现相邻点，违反的是“指纹非空”中的哪一步；若出现公共邻点，违反的是“指纹不同”中的哪一步。四项都能闭卷完成才通过卡 04。

七天后红线复测（独立题面）：在路径 $P_7: 1-2-3-4-5-6-7$ 中取 $T = \{2, 3, 5, 6\}$ 。闭卷列出六条边的指纹，并只用正向补集引理证明 $S = V \setminus T$ 是 packing。自校验键： $S = \{1, 4, 7\}$ ；六个指纹依次为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{5\}, \{5, 6\}, \{6\}$ ； S 中相邻两点距离均为三，故可行。漏掉“先证 T 可行”或只查无相邻点，均不通过。

对应交互审查卡：04 | 补集引理：正向（红线）

2.5 卡 05：补集引理反向：packing 的补集一定能覆盖并识别边

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从 packing S 出发，证明补集 $T = V(G) \setminus S$ 覆盖且识别全部边；尤其能解释两条不同边的相同非空指纹为何只能是一个单点。

前置知识：卡 02–04。人口自测（先闭卷）：(1) packing 是否允许两个相邻点？(2) 是否允许两个不同选点共享邻点？(3) 在简单图中，若两条边有相同的两个端点，它们还能是不同边吗？失败路由：第 (1)、(2) 题错回卡 03–04；第 (3) 题错回卡 01 的“简单图”约定。

新词与符号

反向命题是

$$S \text{ 是 packing} \implies V(G) \setminus S \text{ 是识别顶点覆盖.}$$

“覆盖”和“识别”是两个不同任务，证明必须分两段完成。

先讲人话

packing 把没装机器的点放得很远。于是任何一条边不可能两头都没机器；而两条边若只在一台机器上打卡，它们剩下的两个端点就会隔着这台机器只有两步，撞上 packing 的禁区。

再讲精确

设 S 是 packing，令 $T = V(G) \setminus S$ 。目标一：对每条边 e ，证明 $e \cap T \neq \emptyset$ 。目标二：对不同边 $e \neq f$ ，证明 $e \cap T \neq f \cap T$ 。

为什么这一步是真的**逐步证明。**

1. packing 中不同点距离至少 3，所以特别地不会相邻；即 S 是独立集。
2. 若有边两个端点都在 S ，它们会相邻，矛盾。因此每条边至少一个端点在 T ，覆盖成立。
3. 反设两条不同边 e, f 有相同指纹 $A = e \cap T = f \cap T$ 。由覆盖， $A \neq \emptyset$ 。
4. 一条简单图的边恰有两个端点。若 $|A| = 2$ ，那么 e 和 f 都只能等于这同一对端点 A ，于是 $e = f$ ，矛盾。因此 $|A| = 1$ 。
5. 写 $A = \{w\}$ 。于是可写 $e = uw$ 、 $f = vw$ ，其中 $u, v \notin T$ ，所以 $u, v \in S$ 。
6. 因 $e \neq f$ ，有 $u \neq v$ ；路径 $u - w - v$ 长为 2，所以 $\text{dist}(u, v) \leq 2$ ，与 S 是 packing 矛盾。
7. 因而不同边不可能有相同指纹，识别成立。 T 是识别顶点覆盖。

跟着做一遍

在 P_5 中取 packing $S = \{1, 4\}$ ，则 $T = \{2, 3, 5\}$ 。四条边的指纹是

$$\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{5\},$$

全部非空且不同。注意 T 与卡 02 的另一个最优集合不必相同；最小集合可以有多个。

跟着做一遍

半开放例 B。在 P_6 中取 packing $S = \{1, 4\}$ ，填出 $T = V \setminus S = \underline{\hspace{2cm}}$ 。依序计算五条边的指纹；其中前四个应为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{5\}$ ，请补出最后一个并核对全部非空、不同。若出现重复，先检查是否漏把某个 T 中端点写入二元素指纹。

最容易掉进去的坑

- “相同非空交集只能是单点”必须证明。若交集含两个端点，两条简单边就完全相同。
- 从 $u - w - v$ 只能得到距离至多 2；这已足以反驳“至少 3”，不必证明它恰为 2。
- 若图允许重边，第 4 步会失败；这正是卡 01 要求“简单图”的作用之一。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。在 P_4 中从 packing $S = \{1, 4\}$ 出发，列出补集 T 和全部指纹。

L1-2 换图。在 K_3 中从 packing $S = \{3\}$ 出发，列出 T 和三条边的指纹。

L2-1 迁移。不看证明，分“覆盖”“识别”两段重建反向命题；识别段必须写清相同交集大小为何不是 2。

L2-2 含孤立点。图 G 由路径 $1-2-3-4$ 与孤立点 x 组成。验证 $S = \{1, 4, x\}$ 是 packing，并用反向引理证明 $T = V \setminus S$ 是识别顶点覆盖；最后逐边列指纹复核。

L3 边界。若允许两条平行重边连接同一对顶点，第 4 步哪里坏掉？这说明哪项研究边界不可漏？

核对答案与推理

L1-1: $T = \{2, 3\}$, 边 12, 23, 34 的指纹为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}$, 故可行。

L1-2: $T = \{1, 2\}$, 边 12, 23, 31 的指纹分别为 $\{1, 2\}, \{2\}, \{1\}$, 所以可行。

L2-1: 覆盖段由 packing 蕴含独立得到。识别段反设 $e \cap T = f \cap T = A \neq \emptyset$; 若 $|A| = 2$, 简单边 $e = f = A$, 与不同边矛盾, 故 $A = \{w\}$; 两边剩余端点 $u, v \in S$ 经 w 距离至多 2, 再矛盾。

L2-2 六层答案。

1. **结果:** S 是 packing, $T = \{2, 3\}$ 是识别顶点覆盖。
2. **定义起点:** packing 要求不同选点距离至少 3; 反向补集引理把其补集变成识别顶点覆盖。
3. **合法性:** $\text{dist}(1, 4) = 3$, 而 x 与路径点距离为 $+\infty$, 故 S 合格。于是反向引理可用; 三条边 12, 23, 34 的指纹为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}$, 确实非空且不同。
4. **最易错处:** 孤立点虽不接边, 却仍属于 $V(G)$, 因此必须出现在补集计算的一侧; 跨分量距离不是 0。
5. **独立复核:** 不用引理, 指纹表已经直接验证覆盖和识别两条件。
6. **评分与最低表述:** 三类距离核对 2 分, 补集 1 分, 正确使用引理 2 分, 指纹复核 2 分; 最低合格表述必须明确写出 $+\infty \geq 3$, 并列出全部三条边的指纹。

L3: 平行重边可以是两条不同边却有完全相同的两个端点, 所以即使 $|A| = 2$ 也不能推出它们是同一条边。论文只研究简单图, 这排除了该障碍。

本卡过关门

红线门: 闭卷重建七步证明, 并回答两个随机追问: “相同交集为何非空?” “为何不能有两个元素?” 随后换成一张新图, 从 packing 实际列出补集指纹。

一天后不同题: 令 G 为五边形 $C_5 = 1, 2, 3, 4, 5, 1$ 再加一个孤立点 x , 取 $S = \{1, x\}$ 。先核对 $\text{dist}(1, x) = +\infty$, 再求 $T = V \setminus S$, 列出五条圈边在 T 上的全部指纹; 最后分别用反向补集引理和指纹表说明 T 可行。若漏掉孤立点、无穷距离或任一条边指纹, 均不通过卡 05。

七天后红线复测 (独立题面): 在八点圈 C_8 中取 $S = \{1, 4\}$ 。先直接证明 S 是 packing, 再令 $T = V \setminus S$, 分别用反向补集引理和完整指纹表证明 T 是识别顶点覆盖。**自校验键:** $\text{dist}(1, 4) = 3$; $T = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$; 沿边 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 81 的指纹依次为 $\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8\}$, 全部非空且不同。

2.6 卡 06：极值恒等式： $\tau_D(G) + \rho(G) = n$

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能把卡 04、05 的双向补集关系转成两个方向的不等式，再严谨推出 $\tau_D(G) + \rho(G) = n$ ；不会用“一一对应”四字掩盖极值逻辑。

前置知识：卡 04、05，以及“最小值/最大值怎样证等号”。**人口自测（先闭卷）：**(1) 若 $|V| = 10$ 、 $|T| = 6$ ，则 $|V \setminus T|$ 是多少？(2) 找到一个大小为 3 的可行对象，对“最大值”给出的是上界还是下界？(3) 分别说出卡 04 与卡 05 的补集方向。**失败路由：**第 (1) 题错回预备篇“集合大小”；第 (2) 题错回“最值的构造与排除”；第 (3) 题错回卡 04-05。

新词与符号

$\tau_D(G)$ 是最小化参数， $\rho(G)$ 是最大化参数， $n = |V(G)|$ 。本卡结论读作：“tau 下标 D 加 rho 等于顶点数”。

先讲人话

全部 n 个点被分成两盒：打卡器盒 T 与剩余盒 S 。卡 04、05 说明，一盒满足识别规则恰好等价于另一盒满足远离规则。于是让第一盒尽量小，就等于让第二盒尽量大。

再讲精确

对每一张有限简单无向图 G ，

$$\tau_D(G) + \rho(G) = n.$$

这是参数恒等式，不只是某一个成功例子的大小相加。

为什么这一步是真的

第一个方向。取一个大小恰为 $\tau_D(G)$ 的最小识别顶点覆盖 T 。卡 04 说明 $S = V \setminus T$ 是 packing，大小为 $n - \tau_D(G)$ 。最大 packing 至少这么大：

$$\rho(G) \geq n - \tau_D(G),$$

即 $\tau_D(G) + \rho(G) \geq n$ 。

第二个方向。取一个大小恰为 $\rho(G)$ 的最大 packing S 。卡 05 说明 $T = V \setminus S$ 是识别顶点覆盖，大小为 $n - \rho(G)$ 。最小识别顶点覆盖至多这么大：

$$\tau_D(G) \leq n - \rho(G),$$

即 $\tau_D(G) + \rho(G) \leq n$ 。

同一个量既不小于 n 又不大于 n ，故只能等于 n 。

跟着做一遍

对 P_5 , 卡 02 得 $\tau_D = 3$, 卡 03 得 $\rho = 2$, 确有 $3 + 2 = 5 = n$ 。反过来, 只要独立算出 $\rho(P_5) = 2$, 恒等式就立即给出 $\tau_D(P_5) = 5 - 2 = 3$ 。

跟着做一遍

半开放例 B. 某有限图有 $n = 10$, 并已独立证明 $\rho = 3$ 。由最大 packing 的补集得到 $\tau_D \leq \underline{\quad}$; 由恒等式 (或补集关系的另一方向) 得到 $\tau_D \geq \underline{\quad}$, 所以 $\tau_D = \underline{\quad}$ 。自检: 两个空格必须是同一个数, 且两个不等号方向相反。

最容易掉进去的坑

从“一个 T 的补集是一个 packing”只能得到某个不等式。要得到参数等号, 必须分别取最小 T 和最大 S , 写完两个方向。有限图保证这些极值在有限多个子集中确实能取到。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿. 已知一张 9 点图的最大 packing 大小为 2, 求 τ_D 。

L1-2 换数字. 一张 14 点图满足 $\rho = 4$, 求 τ_D 。

L2-1 迁移. 不写“一一对应”, 逐行写出两个不等式并合并成恒等式。

L2-2 反向读数. 某有限简单无向图有 $n = 11$ 且 $\tau_D = 8$ 。求 ρ , 并从“最小 T ”与“最大 S ”分别写出两个不等式, 说明为什么不是只靠一次减法猜答案。

L3 解释. 有人只用最小 T 的补集得到 $\rho \geq n - \tau_D$, 便宣布等号成立。指出他只证明了哪一边, 还缺哪一边。

核对答案与推理

L1-1: $\tau_D = 9 - 2 = 7$ 。

L1-2: $\tau_D = 14 - 4 = 10$ 。

L2-1: 最小 T 给 packing 大小 $n - \tau_D$, 故 $\rho \geq n - \tau_D$; 最大 S 给识别顶点覆盖大小 $n - \rho$, 故 $\tau_D \leq n - \rho$ 。分别整理为和式的 $\geq n$ 与 $\leq n$, 合得等号。

L2-2 六层答案。

- 结果:** $\rho = 11 - 8 = 3$ 。
- 定义起点:** τ_D 是最小识别顶点覆盖大小, ρ 是最大 packing 大小; 卡 04-05 给出双向补集关系。
- 合法性:** 最小 T 的补集是大小 $11 - 8 = 3$ 的 packing, 故 $\rho \geq 3$ 。最大 S 的补集是大小 $11 - \rho$ 的识别顶点覆盖, 故 $8 = \tau_D \leq 11 - \rho$, 即 $\rho \leq 3$ 。合得 $\rho = 3$ 。
- 最易错处:** “最大 packing 至少有 3 个”写作 $\rho \geq 3$, 方向不能反; 只写这一边还不能证等号。
- 独立复核:** 代回恒等式得 $8 + 3 = 11 = n$, 并与两个不等式同时相容。
- 评分与最低表述:** 结果 1 分, 最小 T 方向 2 分, 最大 S 方向 2 分, 复核 1 分; 最低合格表述必须出现两个相反方向的不等式, 而不能只写“由公式得 3”。

L3: 他只证明 $\tau_D + \rho \geq n$ 。还需从最大 packing 的补集是识别顶点覆盖推出 $\tau_D + \rho \leq n$ 。

本卡过关门

闭卷在三分钟内写出两个方向，每行标注“最小”或“最大”带来的不等号方向；再用一张 8 点、 $\rho = 1$ 的假设图求 τ_D 。全部正确才通过卡 06。

一天后复测（不同题）：一张 15 点图满足 $\rho = 4$ 。闭卷求 τ_D ，并写出产生恒等式的两个不等式及各自使用的极值对象。

对应交互审查卡：06 | $\tau_D + \rho = n$ 的极值逻辑

2.7 卡 07: Henning–Yeo 右端必须使用实际最大度

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能写出 Henning–Yeo 猜想右端 $B_{HY}(G)$ ，并能从度数表确定应代入的实际 $\Delta(G)$ ；不会拿“度数至多某数”冒充“最大度恰为某数”。

前置知识：卡 01、02，以及变量与上界的区别。**人口自测（先闭卷）：**(1) 度数表为 1, 3, 2, 2 时，实际最大度是多少？(2) 只知所有度数不超过 5，能否断言 $\Delta = 5$ ？(3) 已知度数和为 12，边数是多少？**失败路由：**第 (1)、(2) 题错回卡 01 “实际最大度”；第 (3) 题错回预备篇“握手引理”。

新词与符号

$$B_{HY}(G) = \frac{\Delta(\Delta - 1)n + 2m}{\Delta^2 + 1}.$$

B_{HY} 读作“B 下标 H-Y”，是 Henning–Yeo 所猜上界的右端。这里 n 是顶点数， m 是边数， $\Delta = \Delta(G)$ 是图的**实际最大度**。

先讲人话

公式像一台要输入三项读数的仪表。 Δ 这一格要求“全图最忙路口真实连了几条路”，不是“设计规范允许最多几条”。把允许上限输进去，算的是另一台仪表，不是在检验原猜想。

再讲精确

原猜想声称每张研究范围内的图都满足

$$\tau_D(G) \leq B_{HY}(G).$$

若已证明所有顶点度数 $\leq D$ ，只能推出 $\Delta(G) \leq D$ 。还需找到一个度数等于 D 的顶点，才可写 $\Delta(G) = D$ 并把 D 代入原式。

跟着做一遍

在 P_4 中, $n = 4, m = 3$, 度数为 $1, 2, 2, 1$, 所以实际 $\Delta = 2$ 。正确右端为

$$B_{HY}(P_4) = \frac{2(2-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2^2 + 1} = \frac{14}{5}.$$

虽然所有度数也都不超过 3, 但把 3 代入会得到 3, 那不是该图在原猜想中的 $B_{HY}(P_4)$ 。

跟着做一遍

半开放例 B. 某四点简单图的度数为 $1, 3, 2, 2$ 。先用握手引理填 $m = \underline{\hspace{1cm}}$, 再写实际 $\Delta = \underline{\hspace{1cm}}$, 最后代入

$$B_{HY}(G) = \frac{\underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} - 1) \cdot 4 + 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}}}{\underline{\hspace{1cm}}^2 + 1}.$$

自检: 最大度必须在度数表中真实出现, 且度数和应等于 $2m$ 。

为什么这一步是真的

判断实际最大度有两道门:

1. 上界门: 证明每个顶点的度都不超过 D ;
2. 达到门: 指出至少一个顶点的度恰好是 D 。

两门合起来才有 $\Delta(G) = D$ 。后面的负载树、Petersen 纤维和车图构造都会反复使用这个逻辑。

最容易掉进去的坑

$B_{HY}(G)$ 对 Δ 的依赖不是让作者任选参数。即使换一个更大数后不等式仍然失败或仍然成立, 也没有直接回答原猜想对这张图说了什么。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿. 星图 $K_{1,4}$ 有 $n = 5, m = 4$ 。写出度数表、实际 Δ 和 $B_{HY}(G)$ 。

L1-2 度数表. 某五点简单图的度数为 $4, 3, 3, 2, 2$ 。求 m 、实际 Δ 与 $B_{HY}(G)$ 。

L2-1 迁移. 某构造中所有顶点度数不超过 5, 但实际出现的度数只有 $2, 3, 4$ 。原式应代什么? 若论文写 $\Delta = 5$, 缺哪一步?

L2-2 数据审计. 某六点简单图的度数为 $5, 5, 4, 3, 3, 2$ 。不用看图, 求 m 、实际 Δ 与 $B_{HY}(G)$, 并写出“上界门”和“达到门”。

L3 解释. 用一句生活类比向小学生说明“最大度上界”和“实际最大度”的差别。

核对答案与推理

L1-1: 中心度 4, 四片叶子各度 1, 所以 $\Delta = 4$;

$$B_{HY}(G) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{17} = \frac{68}{17} = 4.$$

L1-2: 度数和为 14, 所以 $m = 7$; 实际最大度是 4, 故

$$B_{HY}(G) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{17} = \frac{74}{17}.$$

L2-1: 应代实际最大值 4。论文只证明了 $\Delta(G) \leq 5$ ，却没有找到度为 5 的顶点；因此“等于 5”的达到门缺失。

L2-2 六层答案。

1. **结果:** $m = 11$ 、 $\Delta = 5$ ，且 $B_{HY}(G) = 71/13$ 。
2. **定义起点:** 实际最大度是度数表的最大值；握手引理给 $2m = \sum_v d(v)$ ； B_{HY} 必须代实际 Δ 。
3. **合法性:** 度数和 $5+5+4+3+3+2 = 22$ ，故 $m = 11$ 。所有度数都不超过 5(上界门)，且有顶点度数等于 5(达到门)，所以 $\Delta = 5$ 。于是 $B_{HY} = (5 \cdot 4 \cdot 6 + 22)/26 = 142/26 = 71/13$ 。
4. **最易错处:** 公式中是 $2m = 22$ ，不能把已经求出的 $m = 11$ 直接放在“ $2m$ ”的位置而漏乘 2。
5. **独立复核:** 六点简单图的最大可能度为 5，表中确有两个 5；结果与结构上限一致。
6. **评分与最低表述:** 握手求边数 2 分，两道最大度门 2 分，代式化简 2 分；最低合格表述必须点名一个“度 5 已达到”，不能只说“都不超过 5”。

L3 示例: 教室规定最多坐 50 人是容量上限，今天实际到场最多只有 38 人；“允许 50”不能改写成“实际有 50”。

本卡过关门

红线门：给你三张小图或三份度数表，你必须先写“所有点 $\leq D$ ”，再指出“某点 $= D$ ”，最后才代入 B_{HY} 。若只写上界就不能通过。一天后换图复测。

七天后红线复测（独立题面）: 某图六个顶点的度数为 5, 3, 3, 3, 2, 2。同学只证明“每点度数至多六”，便把 $\Delta = 6$ 代入 B_{HY} 。判断并修正。**自校验键:** 实际最大度是五，因为所有度数都不超过五且第一个点达到五；“至多六”只能给 $\Delta \leq 6$ ，不能证明 $\Delta = 6$ ，代入六属于换了参数。

对应交互审查卡：07 | Henning-Yeo 右端与实际最大度（红线）

2.8 卡 08：整数余量与加性差：先把负号钉死

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能在不给小数近似的情况下计算整数余量 $\mu(G)$ ，准确判断反例方向，并把余量换成实际的 additive gap（加性差）。

前置知识: 卡 06、07，以及清分母和正负数。**人口自测（先闭卷）:** (1) 为什么 $\Delta^2 + 1$ 一定为正？(2) “清分母后的右端减左端”为负，说明哪一边更大？(3) 公式中的 Δ 应取实际最大度还是任意上界？**失败路由:** 第 (1)、(2) 题错回预备篇“正负数与清分母”；第 (3) 题错回卡 07。

新词与符号

$$\mu(G) = \Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)\tau_D(G),$$

$$\tau_D(G) - \mathbf{B}_{\text{HY}}(G) = -\frac{\mu(G)}{\Delta^2 + 1}.$$

μ 是希腊字母 μ ，读作“缪”，本书称整数余量；第二行是实际左端超过猜想右端的**加性差**。

先讲人话

余量采用“清分母后的右边减左边”。右边还剩钱， $\mu > 0$ ；刚好打平， $\mu = 0$ ；右边不够付左边， $\mu < 0$ 。所以反例对应负余量，而真正“超过了多少”要再取负号。

再讲精确

因为 $\Delta^2 + 1 > 0$ ，原不等式

$$\tau_D(G) \leq \frac{\Delta(\Delta - 1)n + 2m}{\Delta^2 + 1}$$

等价于 $\mu(G) \geq 0$ 。因此

$$G \text{ 是反例} \iff \mu(G) < 0$$

且正的 additive gap 恰好对应负的 margin。

跟着做一遍

设一张图的参数为 $n = 8, m = 11, \Delta = 4, \tau_D = 7$ 。清分母后，猜想要求

$$(4^2 + 1) \cdot 7 \leq 4(4 - 1) \cdot 8 + 2 \cdot 11,$$

即 $119 \leq 118$ ，显然失败。整数余量为

$$\mu = 118 - 119 = -1,$$

加性差为

$$\tau_D - \mathbf{B}_{\text{HY}} = -\frac{-1}{17} = \frac{1}{17} > 0.$$

后面会证明这正是 $H_{2,2}$ 。

跟着做一遍

半开放例 B。某图实际 $\Delta = 3$ ，并已算得 $\mu = -4$ 。填空：分母 $\Delta^2 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\text{gap} = -\mu/(\Delta^2 + 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，其符号为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，所以该图 $\underline{\hspace{2cm}}$ （是/不是）反例。自检口令：负 margin，正 gap，反例。

为什么这一步是真的

从定义推第二行：

$$\begin{aligned}\tau_D - B_{HY} &= \tau_D - \frac{\Delta(\Delta-1)n + 2m}{\Delta^2 + 1} \\ &= \frac{(\Delta^2 + 1)\tau_D - \Delta(\Delta-1)n - 2m}{\Delta^2 + 1} \\ &= -\frac{\mu}{\Delta^2 + 1}.\end{aligned}$$

分母始终为正，因此符号完全由 $-\mu$ 决定。

最容易掉进去的坑

- $\mu = -5$ 不是“猜想还剩负五所以差为负五”；真正加性差是 $5/(\Delta^2 + 1) > 0$ 。
- 必须使用卡 07 的实际最大度。
- 余量是清分母后的整数，gap 通常是有理数；二者数值尺度不同。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。参数为 $n = 10, m = 16, \Delta = 5, \tau_D = 9$ 。计算 B_{HY}, μ 和 gap，并判断是否反例。

L1-2 正余量。某图实际 $\Delta = 4$ 且 $\mu = 17$ 。求 gap，并判断猜想在该图上是失败、取等还是有余量成立。

L2-1 迁移。某图 $\Delta = 6$ 且 $\mu = -38$ 。不用知道 n, m ，直接求 gap。

L2-2 全链计算。某图参数为 $n = 12, m = 20, \Delta = 5, \tau_D = 11$ 。分别计算 B_{HY}, μ 和 gap，并用两条独立路线核对 gap。

L3 纠错。有人写：“ $\mu < 0$ ，所以 $\tau_D - B_{HY} < 0$ ，猜想成立。”指出两个相连的错误。

核对答案与推理

L1-1: 分子 $5 \cdot 4 \cdot 10 + 32 = 232$ ，分母 26，故 $B_{HY} = 232/26 = 116/13$ 。 $\mu = 232 - 26 \cdot 9 = -2$ ，gap $= 2/26 = 1/13 > 0$ ，所以是反例。

L1-2: gap $= -17/17 = -1 < 0$ ，即 τ_D 比猜想右端小 1；猜想有余量成立，不是反例也不是取等。

L2-1: 分母 $6^2 + 1 = 37$ ，gap $= -(-38)/37 = 38/37$ 。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** $B_{HY} = 140/13$ ， $\mu = -6$ ，gap $= 3/13 > 0$ ，故为反例。
2. **定义起点：** μ 是清分母后的“右减左”，而 $\text{gap} = \tau_D - B_{HY} = -\mu/(\Delta^2 + 1)$ 。
3. **合法性：**实际 $\Delta = 5$ ，分母为 26；右端分子 $5 \cdot 4 \cdot 12 + 2 \cdot 20 = 280$ ，故 $B_{HY} = 280/26 = 140/13$ 。余量 $280 - 26 \cdot 11 = -6$ ，所以 gap $= 6/26 = 3/13$ 。
4. **最易错处：**余量为负时，gap 前还有一个负号；不能把 $-6/26$ 当作 gap。
5. **独立复核：**直接相减 $11 - 140/13 = 143/13 - 140/13 = 3/13$ ，与 $-\mu/26$ 完全一致。

6. 评分与最低表述： B_{HY} 2 分，margin 2 分，gap 两路复核 2 分，反例方向 1 分；最低合格表述必须写出“ $-6 \mapsto +3/13$ ”，并明确正 gap 表示左端超过右端。

L3：第一，gap 等于 $-\mu/(\Delta^2 + 1)$ ，多一个负号；第二，正 gap 才表示实际 τ_D 超过上界，即猜想失败。正确结论是 $\mu < 0 \Rightarrow \text{gap} > 0 \Rightarrow$ 反例。

本卡过关门

红线门：闭卷画出 $\mu < 0, = 0, > 0$ 三种情况与“反例/等号/有余量”的对应；现场计算一组新参数，并口头连续说三遍：**负 margin，正 gap，反例。**

一天后不同题：对四点路径 P_4 ，已知 $n = 4, m = 3, \Delta = 2, \rho = 2$ 。先由补集恒等式求 τ_D ；再用整数余量公式求 μ ；最后直接计算 $\tau_D - B_{HY}$ ，验证两条路线分别得到 $\mu = 4$ 与 $\text{gap} = -4/5$ 。必须解释“正 margin、负 gap、猜想有余量成立”，不能只报数。

七天后红线复测（独立题面）：只给 $\Delta = 5$ 与整数余量 $\mu = -6$ ，求 $\tau_D - B_{HY}$ ，并判断猜想是否被违反。再反向说明若 gap 为 $3/13$ ，余量应是多少。**自校验键：** $\tau_D - B_{HY} = -\mu/(\Delta^2 + 1) = 6/26 = 3/13 > 0$ ，所以严格违反；反向余量为 $-26 \cdot 3/13 = -6$ 。两次负号必须一致。

对应交互审查卡：08 | 整数 margin、additive gap 与符号（红线）

2.9 卡 09：亏损改写：把全图公式拆成每个点的贡献

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从 $\tau_D = n - \rho$ 和握手引理逐行推出 margin 的 packing 形式与 deficit（度亏损）不等式，并能用原公式和改写公式独立验算同一张图。

前置知识：卡 01、06、08，以及求和、展开括号和握手引理。**人口自测（先闭卷）：**(1) 写出握手引理；(2) 由 $\tau_D + \rho = n$ 写出 τ_D ；(3) n 个顶点各贡献常数 $\Delta + 1$ ，总贡献是多少？**失败路由：**第 (1)、(3) 题错回预备篇“度数求和”；第 (2) 题错回卡 06。

新词与符号

deficit 译作“亏损”。对每个顶点 v ，数

$$\Delta + 1 - d_G(v),$$

即它离统一基准 $\Delta + 1$ 还差多少。符号 $\sum_{v \in V(G)}$ 读作“对顶点集中的每个 v 求和”。

先讲人话

把每个点都假想成应该拿到 $\Delta + 1$ 枚筹码，实际度数 $d(v)$ 已拿走一部分，剩下的就是亏损。低度点多，亏损总额会很大；packing 数则像允许抵扣亏损的优惠券数量。

再讲精确

对每张图,

$$\mu(G) = (\Delta^2 + 1)\rho(G) - ((\Delta + 1)n - 2m). \quad (2.1)$$

因此 Henning-Yeo 猜想等价于

$$\sum_{v \in V(G)} (\Delta + 1 - d_G(v)) \leq (\Delta^2 + 1)\rho(G). \quad (2.2)$$

为什么这一步是真的

第一条路线：代入补集恒等式。

$$\begin{aligned} \mu &= \Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)\tau_D && \text{余量定义} \\ &= \Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)(n - \rho) && \text{卡 06} \\ &= (\Delta^2 - \Delta)n + 2m - (\Delta^2 + 1)n + (\Delta^2 + 1)\rho \\ &= (\Delta^2 + 1)\rho - (\Delta + 1)n + 2m \\ &= (\Delta^2 + 1)\rho - ((\Delta + 1)n - 2m). \end{aligned}$$

第二条路线：把括号变成逐点亏损。

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} (\Delta + 1 - d(v)) &= \sum_v (\Delta + 1) - \sum_v d(v) \\ &= (\Delta + 1)n - 2m, \end{aligned}$$

因为常数 $\Delta + 1$ 被加了 n 次, 而握手引理给 $\sum_v d(v) = 2m$ 。猜想成立等价于 $\mu \geq 0$, 再移项便得到(2.2)。

跟着做一遍

对 P_4 , $n = 4, m = 3, \Delta = 2, \rho = 2, \tau_D = 2$ 。

原余量公式给

$$\mu = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 6 - 5 \cdot 2 = 4.$$

改写公式给

$$\mu = 5 \cdot 2 - (3 \cdot 4 - 6) = 10 - 6 = 4.$$

逐点度亏损为 2, 1, 1, 2, 总和 6; 右端 $(\Delta^2 + 1)\rho = 10$, 所以亏损不等式成立, 并剩余 margin $10 - 6 = 4$ 。

跟着做一遍

半开放例 B。 对三点路径 P_3 , 填 $n = 3, m = 2, \Delta = 2, \rho = \underline{\hspace{1cm}}$ 。逐点亏损为 $\underline{\hspace{1cm}}$, 总和为 $\underline{\hspace{1cm}}$; packing 抵扣额 $(\Delta^2 + 1)\rho = \underline{\hspace{1cm}}$, 所以 $\mu = \underline{\hspace{1cm}}$ 。最后用原 margin 公式复核。

最容易掉进去的坑

- $\Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 - \Delta$ ，与减去 $\Delta^2 + 1$ 后留下的是 $-\Delta - 1$ ，不是 $-\Delta + 1$ 。
- $\sum_v(\Delta + 1) = n(\Delta + 1)$ ；不能只写一次常数。
- 猜想成立对应 $\mu \geq 0$ ，因此是“总亏损 $\leq$ packing 抵扣额”，方向不可反。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对星图 $K_{1,4}$ ，已知 $n = 5, m = 4, \Delta = 4$ 。先求最大 packing ρ ，再列各点亏损，验证(2.1)。

L1-2 换图。对四点圈 C_4 ，求 n, m, Δ, ρ ，列出逐点亏损，并计算 margin。

L2-1 迁移。从余量定义开始，不看本页推导，逐行得到 packing 形式；每行右侧写依据。

L2-2 双路迁移。对五点圈 C_5 ，先求 n, m, Δ, ρ ，再分别用原 margin 公式和 deficit 公式计算余量，并解释结果的结构含义。

L3 双路验算。对参数记录 $n = 8, m = 11, \Delta = 4, \rho = 1, \tau_D = 7$ ，分别用原 margin 与 deficit 公式算出同一结果，并解释负数的结构含义。

核对答案与推理

L1-1: 星图任意两片叶子距离 2，中心与叶子距离 1，所以 packing 至多一个且单点可行， $\rho = 1$ 。中心度 4，亏损 $5 - 4 = 1$ ；四片叶子各度 1，各亏损 4，总亏损 $1 + 4 \cdot 4 = 17$ 。抵扣额 $(16 + 1) \cdot 1 = 17$ ，故 $\mu = 0$ 。用 $(\Delta + 1)n - 2m = 25 - 8 = 17$ 同样得到零。

L1-2: C_4 有 $n = 4, m = 4, \Delta = 2$ 。任意两点距离至多 2，所以 $\rho = 1$ 。每点度 2、亏损 $3 - 2 = 1$ ，总亏损 4；抵扣额为 5，故 $\mu = 5 - 4 = 1$ 。

L2-1: 标准五行推导见“为什么”框；评分点是正确代入 $\tau_D = n - \rho$ 、正确展开负括号、得到 $-(\Delta + 1)n$ 、最后保留 $+2m$ 。

L2-2 六层答案。

1. **结果:** C_5 的 $n = 5, m = 5, \Delta = 2, \rho = 1$ ，两条路线都给 $\mu = 0$ 。
2. **定义起点:** packing 两点距离至少 3； $\tau_D = n - \rho$ ；总亏损是 $\sum_v(\Delta + 1 - d(v))$ 。
3. **合法性:** C_5 中任意两点的最短距离至多 2，故 packing 至多一个，而单点可行，所以 $\rho = 1, \tau_D = 4$ 。原式给 $2 \cdot 1 \cdot 5 + 10 - 5 \cdot 4 = 0$ 。每点度 2、亏损 1，总亏损 5；抵扣额 $5 \cdot 1 = 5$ ，故改写式也给 0。
4. **最易错处:** 在圈上沿某一方向走三步，不代表最短距离为 3；反方向可能只需两步。
5. **独立复核:** 用紧凑式 $\mu = (\Delta^2 + 1)\rho - ((\Delta + 1)n - 2m) = 5 - (15 - 10) = 0$ 第三次得到同值。
6. **评分与最低表述:** 参数与 ρ 3 分，原式 2 分，亏损路线 2 分，结构解释 1 分；最低合格表述必须说明“总亏损恰等于抵扣额”，所以猜想在该图上取等而非失败。

L3: 原式： $4 \cdot 3 \cdot 8 + 22 - 17 \cdot 7 = 118 - 119 = -1$ 。改写： $17 \cdot 1 - (5 \cdot 8 - 22) = 17 - 18 = -1$ 。结构含义是总度亏损 18 比一个 packing 点提供的抵扣额 17 多 1，所以猜想失败一个清分

母单位。

本卡过关门

红线门：闭卷重建两条等式；随机给一张小图的度数表，你须先用握手引理检查，再用两条路线算同一 margin。若移项、不等号或负号有一处错误，回卡 08 后重做。一天后换参数复测。

七天后红线复测(独立题面)：给定 $n = 12, m = 17, \Delta = 4, \rho = 2$ 。先由 $\tau_D + \rho = n$ 求 τ_D ，再分别用原始余量式与 deficit 形式计算 μ 。**自校验键：** $\tau_D = 10$ ；原式为 $4 \cdot 3 \cdot 12 + 34 - 17 \cdot 10 = 8$ ；deficit 路线为 $17 \cdot 2 - (5 \cdot 12 - 34) = 8$ 。两路不同即先查握手项 $2m = 34$ 与括号负号。

对应交互审查卡：09 | deficit reformulation (红线)

第三章 第二篇：第一个反例积木 $H_{t,r}$

第一篇给了判断工具。本篇要亲手造出一整族图：它们连通、直径为二，而且整数余量严格为负。请不要先背最终公式；真正的作者级掌握，是能从一张空白纸重画构造，并把每个参数重新数出来。

3.1 卡 10：构造 $H_{t,r}$ ：先把积木搭对

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能不看原文重画 $H_{t,r}$ ，准确说出五类顶点与全部边；能列出 $H_{2,2}$ 和 $H_{3,2}$ 的邻接清单，并解释参数为何要求整数 $t, r \geq 2$ 。

前置知识：卡 01。入口自测：你能区分“顶点集合”和“边集合”，并知道团是组内任意两点都相邻的图吗？

先修自测（限时三题）

1. 说出“顶点集合”和“边集合”的区别。
2. 写出三点团 K_3 的全部三条边。
3. 判断虚线分组框是不是图的边，并说明理由。

三题全对再进入本卡；第 1 或 3 题错回卡 01，第 2 题错先重学本卡“团”的定义，再用四点团列六条边复测。

新词与符号

$H_{t,r}$ 读作“ H 下标 t, r ”。两个参数 t, r 都是整数且至少为 2。顶点分成五类：两个特别点 a, b ，以及

$$X = \{x_1, \dots, x_t\}, \quad C = \{c_1, \dots, c_r\}, \quad D = \{d_1, \dots, d_r\}.$$

省略号表示按下标继续列到指定数量，不表示还有无限多个点。

先讲人话

把 a, b 想成河两岸。 X 中每个 x_i 都搭一座“两段桥” $a - x_i - b$ ；每对 c_j, d_j 搭一条“三段桥” $a - c_j - d_j - b$ ；最后把所有 d_j 之间两两相连，形成一个小会客厅。

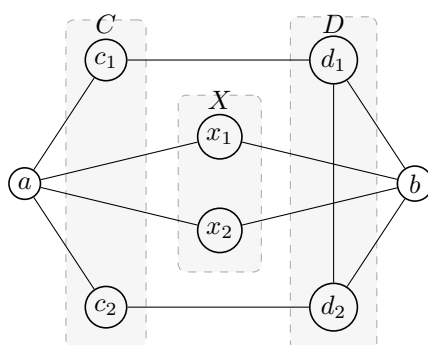
再讲精确

图 $H_{t,r}$ 的边恰好是

$$\begin{aligned} ax_i, bx_i & \quad (1 \leq i \leq t), \\ ac_j, c_jd_j, d_jb & \quad (1 \leq j \leq r), \\ d_id_j & \quad (1 \leq i < j \leq r). \end{aligned}$$

最后一行说 D 诱导一个团：任意两个不同的 d 点相邻。除此之外没有边。

这张图总是连通的：任意 x_i, c_j 都和 a 在同一连通分量，任意 d_j 都和 b 在同一连通分量，而两条边组成的路 $a - x_1 - b$ 又把 a, b 接在一起。因此所有顶点都在同一连通分量中。



图中画的是 $H_{2,2}$ ；虚线框只是分组，不是边。

跟着做一遍

$H_{2,2}$ 的顶点为 $a, b, x_1, x_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 。完整边表是

$$ax_1, bx_1, ax_2, bx_2; \quad ac_1, c_1d_1, d_1b; \quad ac_2, c_2d_2, d_2b; \quad d_1d_2.$$

从任一点都能沿边走到 a 或 b ，所以图连通。这个边表也可用来检查图中没有漏边或多边。

半开放演练 B 把例子改成 $H_{2,3}$ ：写出第三条三段路的三条边，并写出 D 团中所有三条边；最后圈出一条把 a 连到 b 的两步路。

为什么这一步是真的

为什么规定 $t, r \geq 2$ ？一是让 $t + r \geq 4$ ，正好覆盖原猜想第一个未解决的最大度区域；二是后面余量等于 $-(t-1)(r-1)$ ，只有两个因子都为正才严格产生反例。 t, r 必须是整数，因为它们表示顶点和路径的数量。

最容易掉进去的坑

- x_i 同时连 a, b ； c_j 只连 a, d_j ； d_j 连 c_j, b 和其余所有 d 点。三类角色不能互换。
- D 上是团，不是只连成路径。
- 没有边 ab ，也没有边 $x_ix_{i'}$ 、 $c_ic_{i'}$ 或 c_id_j （当 $i \neq j$ ）。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。写出 $H_{2,2}$ 的每个顶点的邻点集合。

L1-2 边表核对。把 $H_{2,2}$ 的边按 X -桥、 C - D 三段路、 D 团三类重列，并核对共 11 条。

L2-1 迁移。闭卷画 $H_{3,2}$ ，列出全部顶点和全部边，并从边表检查连通。

L2-2 纠错重建。一张候选 $H_{2,3}$ 漏了边 d_1d_3 ，却多了边 c_1d_3 。指出两处错误，写出正确的 D 团边与全部 C - D 匹配边。

L3 纠错。某人把 D 只画成 $d_1 - d_2 - \cdots - d_r$ 的路径。他造出的还是 $H_{t,r}$ 吗？以后哪一步会最先受影响？

核对答案与推理

这里 $N(v)$ 读作“ v 的邻点集合”。例如 $N(a) = \{x_1, x_2, c_1, c_2\}$ ，因为这些点且只有这些点与 a 相邻。

L1:

$$\begin{aligned} N(a) &= \{x_1, x_2, c_1, c_2\}, & N(b) &= \{x_1, x_2, d_1, d_2\}, \\ N(x_i) &= \{a, b\}, & N(c_j) &= \{a, d_j\}, \\ N(d_1) &= \{c_1, b, d_2\}, & N(d_2) &= \{c_2, b, d_1\}. \end{aligned}$$

L1-2: X -桥为 ax_1, bx_1, ax_2, bx_2 共 4 条；两条三段路共 6 条； D 团边为 d_1d_2 共 1 条，总数 $4 + 6 + 1 = 11$ 。**L2:** 顶点是 $a, b, x_1, x_2, x_3, c_1, c_2, d_1, d_2$ 。边为六条 ax_i, bx_i ，六条 ac_j, c_jd_j, d_jb ，以及 d_1d_2 ，共 13 条。每个 x_i, c_j, d_j 都沿定义中的边接到 a 或 b ，而 a 经任意 x_i 到 b ，故全图连通。

L3: 不是。 $r \geq 3$ 时路径缺少大量 d_id_j 边。卡 12 中 d_j 的度数和卡 13 中异下标 c_i, d_j 的两步路都会改变。

L2-2 六层答案:

- 结果:** 应补回 d_1d_3 ，删去 c_1d_3 。
- 定义起点:** D 中任意异点相邻； c_i 只连同下标 d_i 。
- 合法性:** D 团边恰为 d_1d_2, d_1d_3, d_2d_3 ；匹配边恰为 c_1d_1, c_2d_2, c_3d_3 。
- 易错点:** “ C 与 D 有边”不等于完全二部连接；这里只是同下标匹配。
- 独立复核:** 检查每个 d_j 都有两个团内邻点和唯一的 c_j 邻点。
- 评分最低表述:** 必须同时写出应删、应补及两张完整边表；只说“画错了”不得分。

本卡过关门

闭卷画 $H_{3,2}$ ，逐类说出“连谁、不连谁”，再与边表双向核对：每条画出的线在表中、表中每条边在图上。能解释 $t, r \geq 2$ 的两项作用才通过卡 10。

一天后换题：闭卷重建 $H_{2,4}$ ，只提交五类顶点、分类型边表和一条连通性证明；不得参考 $H_{2,2}$ 图照抄。

对应交互审查卡：10 | 构造本身与参数范围

3.2 卡 11：数清阶与边数：每一类只数一次

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从构造而不是从记忆推出

$$n = t + 2r + 2, \quad m = 2t + 3r + \binom{r}{2},$$

并能解释团中边数为何是 $\binom{r}{2} = r(r-1)/2$ 。

前置知识：卡 10，以及加法原理和不重复计数。

先修自测（限时三题）

1. 按五类写出 $H_{t,r}$ 的顶点数相加式，不化简。
2. 从四个对象中不计顺序选两个，列出全部六对。
3. 解释为什么无向边 uv 与 vu 不能算两条。

三题全对再继续；第 1 题错回卡 10，第 2-3 题错先用 K_4 的六条边做“不重复计数”复测。

新词与符号

$\binom{r}{2}$ 读作“ r 选 2”，表示从 r 个不同对象中不计顺序选两个的办法数。每一对 d_i, d_j 对应团中的一条边，所以 D 团有

$$\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$$

条边。

先讲人话

像清点积木盒：先按颜色分盘，再把每盘数目相加。只要分类不重叠且没有遗漏，总数就可靠。最危险的做法是盯着复杂图形凭感觉数线。

再讲精确

顶点五组互不重叠： $\{a, b\}$ 有 2 个， X 有 t 个， C, D 各有 r 个，所以

$$n = 2 + t + r + r = t + 2r + 2.$$

边按构造分为： ax_i 共 t 条， bx_i 共 t 条； ac_j, c_jd_j, d_jb 各 r 条； D 团有 $\binom{r}{2}$ 条。因此

$$m = t + t + r + r + r + \binom{r}{2} = 2t + 3r + \binom{r}{2}.$$

跟着做一遍

对 $H_{2,2}$,

$$n = 2 + 2 + 2 + 2 = 8, \quad m = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 11.$$

最后的 1 是 $D = \{d_1, d_2\}$ 中唯一一对顶点形成的边。

半开放演练 B 对 $H_{3,2}$ 填空: 顶点数 $n = \underline{\hspace{2cm}}$; 六类边数依次为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 总边数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

为什么这一步是真的

为何团边数除以 2? 若先从每个 d_i 选择另一个 d_j , 会得到 $r(r-1)$ 个有方向的次序: (d_i, d_j) 与 (d_j, d_i) 被数两次。无向边不分次序, 所以除以 2。

最容易掉进去的坑

- r 条三段路贡献 $3r$ 条边, 不是 $r+1$ 或 $2r$ 。
- D 团的边不含 $d_j b$; 后者已经在三段路中单独计数。
- 虚线分组框不是边, 画线交叉处也不自动产生新顶点。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿。 先按类别计算 $H_{2,3}$ 的 n, m 。

L1-2 数值练习。 计算 $H_{2,4}$ 的 n, m , 并把团边数单独写出。

L2-1 迁移。 计算 $H_{3,4}$ 的 n, m , 并把边数写成六类相加的形式。

L2-2 公式证明。 不看正式框, 按互不重叠的顶点盘与边盘重新推出 $n = t + 2r + 2$ 和 $m = 2t + 3r + \binom{r}{2}$, 并解释每一项来源。

L3 独立验算。 用“所有度数和等于 $2m$ ”说明卡 12 的度数表将能独立检查本卡边数; 先写出你期望看到的等式框架。

核对答案与推理

L1: $n = 2 + 2 + 3 + 3 = 10$; $m = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} = 4 + 9 + 3 = 16$ 。

L1-2: $n = 2 + 2 + 4 + 4 = 12$; D 团有 $\binom{4}{2} = 6$ 条边, 故 $m = 4 + 12 + 6 = 22$ 。

L2: $n = 3 + 8 + 2 = 13$;

$$m = 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + \binom{4}{2} = 6 + 12 + 6 = 24.$$

L3: 下一卡若算出各类顶点度数, 则应验证

$$d(a) + d(b) + \sum_{i=1}^t d(x_i) + \sum_{j=1}^r d(c_j) + \sum_{j=1}^r d(d_j) = 2 \left(2t + 3r + \binom{r}{2} \right).$$

若两边不等, 边计数或度计数至少一处有错。

L2-2 六层答案:

1. **结果:** $n = t + 2r + 2$, $m = 2t + 3r + \binom{r}{2}$ 。

2. **定义起点**：顶点盘为 $\{a, b\}, X, C, D$ ；边盘为两类 X 边、三类路径边和 D 团边。
3. **合法性**：四个顶点盘互不相交；六个边盘由端点类型或下标规则区分，也互不重叠。
4. **易错点**： D 团边不含 bd_j ，三段路贡献的是 $3r$ 而不是 $2r$ 。
5. **独立复核**：代 $t = r = 2$ 得 $n = 8, m = 11$ ，与卡 10 完整边表一致。
6. **评分最低表述**：必须写出分类、不重叠理由和团边 $\binom{r}{2}$ 的含义；只背公式不得分。

本卡过关门

闭卷对 $H_{2,3}$ 先画“计数托盘”，再算 n, m ；不能直接写最终公式。审查者随机改变 t, r 后，你要在两分钟内重算。通过后才勾卡 11。

一天后换题：对 $H_{5,3}$ 只从分类重新计数 n, m ，然后把边数写成六项相加；不得先写闭式再倒推。

对应交互审查卡：11 | 阶数与边数

3.3 卡 12：逐类数度，并证明实际最大度恰为 $t + r$

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能逐类推出每个顶点的度数，先证明所有度数不超过 $t + r$ ，再指出 a, b 真正达到该值，从而严谨得到 $\Delta(H_{t,r}) = t + r$ 。

前置知识：卡 10 与卡 07 的“上界门 + 达到门”。

先修自测（限时三题）

1. 从边表说出 x_i 的两个邻点。
2. 解释“所有点度数不超过 M ”只能推出什么。
3. 还要补哪一种证据，才能证明实际最大度等于 M ？

三题全对再继续；第 1 题错回卡 10，第 2-3 题错回卡 07 的“上界门 + 达到门”。

新词与符号

$d(v)$ 是顶点 v 的度数， Δ 是度数的实际最大值。下标 i 用于 X ，下标 j 用于成对的 c_j, d_j ；同一公式适用于每个允许下标。

先讲人话

数一个人的握手数，只看从他伸出去的线。先分别数五类角色，再比较谁最多。不能因为设计目标写着 $t + r$ ，就跳过“有没有人真的达到”。

再讲精确

由构造直接得到

$$d(a) = d(b) = t + r, \quad d(x_i) = d(c_j) = 2, \quad d(d_j) = r + 1.$$

因为 $t, r \geq 2$, 有 $2 \leq t + r$ 且 $r + 1 \leq r + t = t + r$; 所有顶点度数都不超过 $t + r$ 。同时 a, b 的度数恰为 $t + r$, 故

$$\Delta(H_{t,r}) = t + r.$$

跟着做一遍

在 $H_{3,4}$ 中, a, b 各连 3 个 x 和 4 个 c 或 d , 度为 7; 每个 x_i, c_j 度为 2; 每个 d_j 连 c_j, b 以及其余 3 个 d , 度为 5。因此实际最大度为 7。

独立握手检查: 度数和

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 48 = 2 \cdot 24 = 2m.$$

半开放演练 B 把参数改成 $H_{2,4}$: 先分别写 a, b, x_i, c_j, d_j 的度数, 再用“上界 + 达到”填出实际最大度。

为什么这一步是真的

$d(d_j) = r + 1$ 的来源是 1 条 $c_j d_j$ 、1 条 $d_j b$ 和 $r - 1$ 条连向其余 D 顶点的边, 总计 $1 + 1 + (r - 1) = r + 1$ 。比较 $r + 1$ 与 $t + r$ 时使用 $t \geq 1$; 论文采用更强的 $t \geq 2$, 因此当然成立。

最容易掉进去的坑

- 每个 d_j 不与所有 c_i 相连, 只与同下标 c_j 相连。
- 证明“度数都 $\leq t + r$ ”后仍需指出 a 或 b 达到, 才是实际最大度。
- 最大度不是顶点数, 也不是边数; 三者单位不同。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿。列出 $H_{2,3}$ 各类度数并确定实际最大度。

L1-2 数值练习。列出 $H_{3,3}$ 各类度数, 求实际最大度, 并算度数和。

L2-1 迁移。对 $H_{4,3}$ 重算度数, 并用握手引理与卡 11 的边数互检。

L2-2 一般证明。对任意 $t, r \geq 2$, 从邻接定义推出五类度数, 再用“上界 + 达到”证明实际最大度恰为 $t + r$; 最后以握手引理复核一般边数。

L3 证明。写出“所有点度数至多 $t + r$ ”和“至少一个点度数达到 $t + r$ ”两段; 再说明若只保留第一段, 最多能写什么结论。

核对答案与推理

L1: a, b 度 5; 每个 x, c 度 2; 每个 d 度 4, 所以 $\Delta = 5$ 。

L1-2: a, b 度 6; 三个 x 、三个 c 各度 2; 三个 d 各度 4, 故 $\Delta = 6$ 。度数和为 $12+6+6+12 = 36$ 。

L2: a, b 度 7; 四个 x 与三个 c 各度 2; 三个 d 各度 4。度数和 $14+8+6+12 = 40$ 。卡 11 给 $m = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + \binom{3}{2} = 20$, 确有 $40 = 2m$ 。

L3: 由 $2 \leq t+r$ 和 $r+1 \leq t+r$, 五类点全不超过 $t+r$; 由 $d(a) = t+r$, 上界被达到, 故等号成立。若缺达到段, 只能写 $\Delta(H_{t,r}) \leq t+r$ 。

L2-2 六层答案:

- 结果:** $d(a) = d(b) = t+r$, $d(x_i) = d(c_j) = 2$, $d(d_j) = r+1$, 故 $\Delta = t+r$ 。
- 定义起点:** 度数等于与该点相接的边数, 所有边来自卡 10 的完整边表。
- 合法性:** $2 \leq t+r$, $r+1 \leq t+r$; 同时 a, b 实际达到 $t+r$ 。
- 易错点:** d_j 只连同下标 c_j , 但与其余 $r-1$ 个 d 都相连。
- 独立复核:** 度数和为 $2(t+r) + 2t + 2r + r(r+1) = 4t + 5r + r^2 = 2m$ 。
- 评分最低表述:** 必须分五类、给出至多和达到两门, 并完成握手复核; 只写 $\Delta = t+r$ 不得分。

本卡过关门

红线门: 闭卷画一张新的 $H_{t,r}$, 逐类数度; 必须明确说出“至多”和“达到”两句话, 并用握手引理复核。一天后更换参数复测。任一条件缺失都不能勾卡 12。

七天后红线复测 (独立题面): 从定义画 $H_{3,4}$, 列出每类点的度数与个数, 证明实际最大度, 并用度数和复核边数。**自校验键:** a, b 各度七; 四个 d_j 各度五; 三个 x_i 与四个 c_j 共七点各度二。因此 $\Delta = 7$, 度数和 $2 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 48$, 故 $m = 24$; 也等于 $2t + 3r + \binom{r}{2} = 6 + 12 + 6$ 。

对应交互审查卡: 12 | 各类顶点度数与实际最大度 (红线)

3.4 卡 13: 直径至多二: 把所有非邻接类型一格不漏地检查**学完本卡, 你应该能做到**

学完本卡, 你能系统列出 $H_{t,r}$ 的全部非邻接点对类型, 为每一类写出长度至多二的路, 并说明分类为什么没有遗漏。

前置知识: 卡 10、卡 01 的距离, 以及卡 03 对“距离至多二”的敏感性。

先修自测 (限时三题)

- 长度二的路包含几条边? 写一个符号例子。

2. 相邻点的距离是多少?

3. 证明“任意点对距离至多二”时, 为什么只检查很多例子还不够?

三题全对再继续; 第 1-2 题错回卡 01, 第 3 题错回卡 03 的“穷尽分类”练习。

新词与符号

图的直径是所有点对最短距离的最大值。本卡只证明“直径至多二”, 记作 $\text{diam}(H_{t,r}) \leq 2$; 下一卡再证明等号。“长度二的路”形如 $u - w - v$, 包含两条边。

先讲人话

五类顶点像五种角色。与其盯着大图猜“好像都很近”, 不如做一张角色配对表: 每一格要么已经直接相连, 要么明确写出中转站。表格填满, 才叫没有漏。

再讲精确

只需检查非邻接点对, 因为相邻点距离已经是 1。下表给出所有非邻接类型及一条至多两步的路。

非邻接类型	见证路	使用的边
a, b	$a - x_1 - b$	ax_1, x_1b
$x_i, x_j, i \neq j$	$x_i - a - x_j$	两点都连 a
$c_i, c_j, i \neq j$	$c_i - a - c_j$	两点都连 a
x_i, c_j	$x_i - a - c_j$	x_ia, ac_j
x_i, d_j	$x_i - b - d_j$	x_ib, bd_j
a, d_j	$a - c_j - d_j$	同下标三段路前两边
b, c_j	$b - d_j - c_j$	同下标三段路后两边
$c_i, d_j, i \neq j$	$c_i - d_i - d_j$	c_id_i 与 D 团边

同下标 c_i, d_i 本来就相邻, 不在最后一行的非邻接清单中。

为什么这一步是真的

为什么没有遗漏? 任意顶点属于 $\{a\}, \{b\}, X, C, D$ 五类之一。逐个考察无序类型对:

- a 与 X, C 已相邻, 只剩 b, D ;
- b 与 X, D 已相邻, 只剩 C ;
- X 内部无边, 与 C, D 也无边;
- C 内部无边, 与 D 要按同下标相邻、异下标不相邻再分;
- D 内部是团, 全部相邻。

恰好得到表中八类, 故所有点对距离都至多二。

跟着做一遍

在 $H_{2,3}$ 中检查最容易漏的两类： c_1 与 d_1 有边，距离 1； c_1 与 d_3 没有边，但 $c_1 - d_1 - d_3$ 是长度 2 的路，因为 D 是团。不能把同下标和异下标混写。

半开放演练 B 在 $H_{3,3}$ 中，为点对 x_3, d_2 与 c_2, d_1 各写一条至多两步的路；再标明两对分别属于类型表中的哪一行。

最容易掉进去的坑

- “列了很多情况”不等于穷尽；必须从五类顶点的全部无序类型对反查。
- $c_i - d_i - d_j$ 依赖 D 是团；若卡 10 画错，这里立即断裂。
- 找到一条长度 2 的路只证明最短距离至多 2，不一定恰为 2；若本来相邻，最短距离是 1。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。为 x_2, c_3 ； a, d_2 ； b, c_1 各写一条长度 2 的路。

L1-2 分类练习。对 $H_{3,4}$ 中的 x_1, d_4 、 c_2, c_4 、 c_3, d_1 ，分别写见证路并标出类型。

L2-1 迁移。合上表格，从五类顶点的 5×5 类型矩阵重新列出所有非邻接类型，并给每格写见证路。

L2-2 穷尽证明。不抄表格，从五类顶点的全部无序类型对出发，先删去已相邻类型，再为剩余类型逐一给两步路，最后解释为什么没有第九类。

L3 穷尽性。有人漏掉异下标的 c_i, d_j ，只说“ C 与 D 由匹配边相连”。解释为何这不足以证明直径至多二，并补上正确路径。

核对答案与推理

L1: $x_2 - a - c_3$ ； $a - c_2 - d_2$ ； $b - d_1 - c_1$ 。

L1-2: $x_1 - b - d_4$ 属 $X-D$ ； $c_2 - a - c_4$ 属 C 内部； $c_3 - d_3 - d_1$ 属异下标 $C-D$ 。

L2: 应重建正式框的八行；评分点还包括说明 $a - X, a - C, b - X, b - D, D - D$ 和同下标 $C - D$ 已相邻，故无需再列。

L3: 匹配边只处理 c_i, d_i ，并没有直接连接 c_i, d_j ($i \neq j$)。必须用 $c_i - d_i - d_j$ ；第二步依赖 $d_i d_j$ 是团边。漏掉这类就没有覆盖全部点对。

L2-2 六层答案：

1. **结果：**所有非邻接点对恰分为正式框的八类，且每类距离至多二。
2. **定义起点：**每个点唯一属于 $\{a\}, \{b\}, X, C, D$ ；只需考察这些类别的无序配对。
3. **合法性：**删去 aX, aC, bX, bD, DD 与同下标 CD 等已相邻类型，剩余类型逐一由 a, b, c_j, d_j 或 D 团给中转点。
4. **易错点：** CD 必须拆成同下标与异下标；否则会漏掉 c_i, d_j ($i \neq j$)。
5. **独立复核：**逐行检查见证路的两条边都在卡 10 边表中，而非只凭图形。

6. **评分最低表述：**必须给“类型来源—已相邻删除—八类见证—无遗漏”四步；只列八条路不解释穷尽性不得满分。

本卡过关门

闭卷重画类型矩阵并补满八类；审查者随机点一格，你要立即给出中转点，并解释全表为何穷尽。只会背一句“直径二”不算通过。一天后重新排列类型顺序再测。

对应交互审查卡：13 | 直径至多二的穷尽分类

3.5 卡 14：从直径二得到 $\rho = 1$ 与 $\tau_D = n - 1$

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能证明 $H_{t,r}$ 的直径恰好为二，再分别证明 $\rho \leq 1$ 与 $\rho \geq 1$ ，最后用补集恒等式求 τ_D 。

前置知识：卡 06 与卡 13。

先修自测（限时三题）

1. packing 中任意两点至少相距多少？
2. 若图的任意点对距离至多二，packing 最多选几个点？
3. 写出 $\tau_D + \rho = n$ 并说出求 τ_D 时要移哪一项。

三题全对再继续；第 1-2 题错回卡 06，第 3 题错重做卡 06 的补集恒等式。

新词与符号

$\text{diam}(G) = 2$ 读作“图 G 的直径等于二”。 $\rho \leq 1$ 是 packing 的上界， $\rho \geq 1$ 是可行构造给出的下界；两者合起来才有 $\rho = 1$ 。

先讲人话

卡 13 证明任何两个不同点最多隔两步。packing 却要求被选的不同点至少隔三步，因此不可能同时选两个。但图里至少有一个点，单独选一个永远不会与第二个点冲突。

再讲精确

卡 13 给 $\text{diam}(H_{t,r}) \leq 2$ 。构造中没有边 ab ，所以 a, b 距离不是 1；而存在路 $a - x_1 - b$ ，故距离为 2。于是直径恰为 2。

任意两个不同顶点距离都至多 2，故 packing 至多含一个点： $\rho \leq 1$ 。任取单点（例如 $\{a\}$ ）都是 packing，故 $\rho \geq 1$ 。所以

$$\rho(H_{t,r}) = 1.$$

再由卡 06 和卡 11,

$$\tau_D(H_{t,r}) = n - \rho = t + 2r + 1.$$

跟着做一遍

对 $H_{2,3}$, 卡 11 给 $n = 10$ 。直径二使 $\rho = 1$, 所以 $\tau_D = 10 - 1 = 9$ 。一个具体最小识别顶点覆盖可以取 $V(H_{2,3}) \setminus \{a\}$; 卡 05 保证它可行。

半开放演练 B 设一张非空连通图直径为 1。先求它的 packing 数, 再说明“直径至多二推出 $\rho = 1$ ”为什么仍然适用。

为什么这一步是真的

“直径至多二”与“图非完全”合起来给“直径恰为二”。这里 a, b 不相邻正是非完全的明确证据。 $\rho = 1$ 也需要两个方向: 直径给上界, 任意单点给下界。若图是空图, 单点下界会失败; 但 $H_{t,r}$ 显然非空。

最容易掉进去的坑

- 直径二不是说每对点距离都恰为二; 相邻点距离仍为一。
- “没有两点 packing”只给 $\rho \leq 1$; 不要忘记单点可行。
- $\tau_D = n - 1$ 来自已证明的补集恒等式, 不是因为“直觉上几乎所有点都要选”。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿。对 $H_{3,2}$ 求 n, ρ, τ_D 。

L1-2 数值练习。对 $H_{2,4}$ 求直径、 n, ρ, τ_D , 并给一个大小为 1 的 packing。

L2-1 迁移。不看正文, 分别写出 $\rho \leq 1$ 与 $\rho \geq 1$ 的理由, 并说明各自用了什么假设。

L2-2 边界迁移。设图由两个非空连通分量组成, 每个分量直径至多二。证明全图 packing 数恰为 2, 并指出这与单个 $H_{t,r}$ 的哪一条假设不同。

L3 边界。若一张非空图的直径至多 2, 是否一定有 $\rho = 1$? 若图不连通且每个分量直径至多 2 呢?

核对答案与推理

L1: $n = 3 + 2 \cdot 2 + 2 = 9$, $\rho = 1$, $\tau_D = 8$ 。

L1-2: 直径 2, $n = 12$, $\rho = 1$, $\tau_D = 11$; 例如 $\{a\}$ 是大小 1 的 packing。

L2: 任意不同点距离至多 2, 违背 packing 的至少 3, 故至多一个; 图非空, 任取单点可行, 故至少一个。

L3: 若“图的直径至多 2”按连通意义成立且图非空, 则是。若图有多个分量, 不同分量距离 $+\infty$, 可以从每个分量各选一个, 所以全图 ρ 可能大于 1; 只知道各分量内部直径二不够。

L2-2 六层答案:

1. **结果:** 两个分量各贡献且只能贡献一个 packing 点, 所以全图 $\rho = 2$ 。

2. **定义起点**：同分量不同点距离至多二；不同分量之间距离记为 $+\infty$ ，满足至少三。
3. **合法性**：每个分量至多选一个，故总数至多二；从两个分量各选一点可行，故至少二。
4. **易错点**：“每个分量直径二”不等于“整图直径二”；不连通图没有有限整体直径。
5. **独立复核**：用“上界二 + 构造两点”夹出等号，结构与卡 14 的“上界一 + 单点”完全平行。
6. **评分最低表述**：必须分别证明 $\rho \leq 2$ 与 $\rho \geq 2$ ，并指出连通性差异；只给一个两点集合不够。

本卡过关门

闭卷按“直径上界—非邻接见证—packing 上界—单点下界—补集恒等式”五步重建。审查者随机给 t, r 后立即算 n, ρ, τ_D 。全部正确才通过卡 14。

一天后换题：给出一张由三个直径至多二的非空分量组成的图，现场证明其 packing 数并写出与顶点覆盖参数的补集关系；不得复用两分量答案的数字。

对应交互审查卡：14 | 直径恰为二、packing 与 τ_D

3.6 卡 15：块余量的完整代数： $\mu(H_{t,r}) = -(t-1)(r-1)$

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能把 n, m, Δ, ρ 逐项代入亏损公式，一行一理由化简为 $-(t-1)(r-1)$ ；还能用原 margin 定义对一个具体参数独立复核。

前置知识：卡 09、11、12、14。

先修自测（限时三题）

1. 写出 $H_{t,r}$ 的 n, m, Δ, ρ 。
2. 写出 packing 形式的余量公式。
3. 展开 $-(t-1)(r-1)$ 。

三题全对再继续；第 1 题错回卡 11–14，第 2 题错回卡 09，第 3 题错先做两组具体数的展开复测。

新词与符号

本卡中的“代入”不是把最终答案倒着凑，而是把已证明的

$$n = t + 2r + 2, \quad m = 2t + 3r + \binom{r}{2}, \quad \Delta = t + r, \quad \rho = 1$$

放进(2.1)。

先讲人话

像把四张已经验真的参数卡插进同一台计算机。每一行都保留来源，最后出现负乘积；只要 $t, r \geq 2$ ，两个正因子前面有负号，就一定失败。

再讲精确

先算两倍边数：

$$2m = 4t + 6r + r(r-1) = 4t + 5r + r^2.$$

再算总亏损括号：

$$\begin{aligned} (\Delta + 1)n - 2m &= (t + r + 1)(t + 2r + 2) - (4t + 5r + r^2) \\ &= t^2 + 3tr - t + r^2 - r + 2. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mu(H_{t,r}) &= ((t+r)^2 + 1) \cdot 1 - (t^2 + 3tr - t + r^2 - r + 2) \\ &= t^2 + 2tr + r^2 + 1 - t^2 - 3tr + t - r^2 + r - 2 \\ &= -tr + t + r - 1 \\ &= \boxed{-(t-1)(r-1)}. \end{aligned}$$

为什么这一步是真的

最后的因式分解可反向展开核对：

$$-(t-1)(r-1) = -(tr - t - r + 1) = -tr + t + r - 1.$$

因为 $t, r \geq 2$ ，有 $t-1 \geq 1, r-1 \geq 1$ ，乘积为正，前面负号使 margin 严格小于零。由卡 08，每个 $H_{t,r}$ 都是反例。

跟着做一遍

取 $H_{3,4}$ 。卡 11-14 给

$$n = 13, \quad m = 24, \quad \Delta = 7, \quad \rho = 1, \quad \tau_D = 12.$$

亏损公式： $\mu = 50 - (8 \cdot 13 - 48) = 50 - 56 = -6$ 。

原定义独立复核：

$$\mu = 7 \cdot 6 \cdot 13 + 2 \cdot 24 - 50 \cdot 12 = 546 + 48 - 600 = -6.$$

因式公式也给 $-(3-1)(4-1) = -6$ ，三路一致。

半开放演练 B 对 $H_{2,4}$ ，先只代 n, m, Δ, ρ 到亏损公式，不使用最终因式；把抵扣额与总亏损分别算出，再判断余量符号。

最容易掉进去的坑

- 展开 $(t+r+1)(t+2r+2)$ 时容易漏 $3tr$ 或常数 2；请先完整展开再合并。
- $2\binom{r}{2} = r(r-1)$ ，不是 $r(r+1)$ 。
- 得到负 margin 后应说“反例”，不能把符号方向说反。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对 $H_{2,3}$ 用亏损公式逐行计算 margin。

L1-2 快速复核。对 $H_{3,2}$ 先用因式公式求 margin，再用原始余量定义复核。

L2-1 迁移。对 $H_{4,2}$ 不使用亏损改写，只用原 margin 定义重新算一遍，并与因式结果比较。

L2-2 双路线审计。对 $H_{2,5}$ ，分别用亏损公式与原始 margin 定义计算；两条路线都必须从 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D$ 开始并得到同一整数。

L3 证明/诊错。有人化简出 $+(t-1)(r-1)$ 。不用重算全部式子，只用 $H_{2,2}$ 的参数说明他的符号必错。

核对答案与推理

L1: $n = 10, m = 16, \Delta = 5, \rho = 1$ ；总亏损 $(6)(10) - 32 = 28$ ，抵扣额 26，所以 $\mu = 26 - 28 = -2$ ，与 $-(1)(2) = -2$ 一致。

L1-2: $n = 9, m = 13, \Delta = 5, \rho = 1, \tau_D = 8$ ；因式给 $-(2)(1) = -2$ 。原式给 $5 \cdot 4 \cdot 9 + 26 - 26 \cdot 8 = 180 + 26 - 208 = -2$ 。

L2: 对 $H_{4,2}$ ，有 $n = 10, m = 15, \Delta = 6, \rho = 1, \tau_D = 9$ 。代入原定义，

$$\mu = 6 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 15 - (6^2 + 1) \cdot 9 = 300 + 30 - 333 = -3.$$

因式公式也给 $-(4-1)(2-1) = -3$ ，两种计算一致。

L3: $H_{2,2}$ 有 $n = 8, m = 11, \Delta = 4, \tau_D = 7$ ，原式直接给 $118 - 119 = -1$ 。而错误公式给 $+(1)(1) = 1$ ，与直接整数计算冲突，所以负号不可丢。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** $H_{2,5}$ 的 margin 为 -4 。
2. **定义起点：** $n = 14, m = 29, \Delta = 7, \rho = 1, \tau_D = 13$ 。
3. **合法性：**亏损式得 $50 - (8 \cdot 14 - 58) = 50 - 54 = -4$ ；原式得 $7 \cdot 6 \cdot 14 + 58 - 50 \cdot 13 = -4$ 。
4. **易错点：** $\Delta^2 + 1 = 50$ 同时用于抵扣与原式最后一项；不要误用 49。
5. **独立复核：**因式 $-(2-1)(5-1) = -4$ 与两路一致。
6. **评分最低表述：**必须列全五个参数、两条计算链和因式复核；只代最终因式不得满分。

本卡过关门

红线门：闭卷从四个参数开始完整化简；再现场对未在例题中出现的 $H_{5,2}$ 用原定义交叉复核，应先得到 $n = 11, m = 17, \Delta = 7, \tau_D = 10$ ，再算出 $\mu = 7 \cdot 6 \cdot 11 + 34 - 50 \cdot 10 = -4$ 。必须写出每行依据、因式展开检查和“负 margin，正 gap，反例”。一天后换 $H_{2,4}$ 复测。

七天后红线复测（独立题面）：对 $H_{4,3}$ ，不引用结论式，先算 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D$ ，再用原始余量式求 μ ；最后用因式式独立复核并求 gap。**自校验键**： $(n, m, \Delta, \rho, \tau_D) = (12, 20, 7, 1, 11)$ ； $\mu = 7 \cdot 6 \cdot 12 + 40 - 50 \cdot 11 = -6$ ； $-(t-1)(r-1) = -3 \cdot 2 = -6$ ；gap 为 $6/50 = 3/25$ 。

对应交互审查卡：15 | 块 margin 的完整代数（红线）

3.7 卡 16：量词结论：每个实际最大度 $\Delta \geq 4$ 都有反例

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能用完整的“对每个—选择—验证—结论”量词链，证明每个整数最大度 $\Delta \geq 4$ 都存在连通反例，并解释为什么该选择不能覆盖 $\Delta = 3$ 。

前置知识：卡 12、15，以及“对所有”和“存在”的区别。

先修自测（限时三题）

1. 分别读出符号 $\forall$ 与 $\exists$ 。
2. 若固定目标 Δ ，构造参数可以依赖它吗？
3. 为什么还必须验证构造的实际最大度恰为目标值？

三题全对再继续；第 1-2 题错先复习本卡量词框，第 3 题错回卡 12 的“上界 + 达到”红线门。

新词与符号

本卡命题的逻辑次序是

$$\forall \Delta \in \mathbb{Z}, \Delta \geq 4, \quad \exists G: \quad G \text{ 连通}, \Delta(G) = \Delta, \mu(G) < 0.$$

$\forall$ 读作“对每一个”， $\exists$ 读作“存在”， $\mathbb{Z}$ 表示整数集合。

先讲人话

有人随意报一个至少为 4 的整数 Δ ，我们都能立刻把它拆成 $2 + (\Delta - 2)$ ，再按这个尺寸造一块积木。这不是同一张图拥有很多最大度，而是每个目标度数配一张自己的图。

再讲精确

固定任意整数 $\Delta \geq 4$ 。选择

$$t = 2, \quad r = \Delta - 2.$$

因为 $\Delta \geq 4$, 所以 $t = 2 \geq 2$ 且 $r = \Delta - 2 \geq 2$, 构造合法。卡 10 说明 $H_{2,\Delta-2}$ 连通; 卡 12 给

$$\Delta(H_{2,\Delta-2}) = 2 + (\Delta - 2) = \Delta;$$

卡 15 给

$$\mu(H_{2,\Delta-2}) = -(2-1)(\Delta-3) = -(\Delta-3) < 0.$$

因此它是实际最大度恰为 Δ 的连通反例。

跟着做一遍

若目标 $\Delta = 7$, 取 $t = 2, r = 5$ 。构造合法, 实际最大度 $2 + 5 = 7$, $\text{margin} = -(1)(4) = -4 < 0$ 。这给出一张具体七度连通反例, 而不是只证明最大度“至多七”。

半开放演练 B 目标改成 $\Delta = 8$: 填 $t = \underline{\quad}, r = \underline{\quad}$, 验证参数范围, 写实际最大度和 margin 。

为什么这一步是真的

证明从“固定任意一个 Δ ”开始, 所以最后可以把结论推广到所有 $\Delta \geq 4$ 。图 G 依赖 Δ ; 量词顺序绝不能换成“存在一张图, 对所有 Δ ”。有限图的实际最大度只有一个确定值。

最容易掉进去的坑

- $\Delta = 3$ 时选择给 $r = 1$, 不满足本族的 $r \geq 2$; 且因式中的 $r - 1 = 0$, 不会得到严格负值。
- 必须引用卡 12 的实际最大度等号, 而不只是参数名字相加。
- 该结论说“存在一个反例”, 还没有说固定度下违反量能无限大。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿。 对 $\Delta = 4, 5, 10$ 分别写出 t, r 和 margin 。

L1-2 数值练习。 对目标 $\Delta = 12$ 写出参数、合法性、实际最大度和 margin 。

L2-1 迁移。 不看正文, 用完整量词写出一般证明; 每一步标注保证“构造合法、连通、实际最大度、严格反例”的卡号。

L2-2 替代选参。 对任意 $\Delta \geq 4$ 改取 $t = \Delta - 2, r = 2$, 证明这同样给实际最大度 Δ 的连通反例, 并比较 margin 与正式框方案。

L3 边界。 解释为何这个证明不能处理 $\Delta = 3$, 并说明“不能由本构造证明”与“命题一定为假”是两回事。

核对答案与推理

L1: $\Delta = 4: (t, r) = (2, 2), \text{margin} -1$; $\Delta = 5: (2, 3), \text{margin} -2$; $\Delta = 10: (2, 8), \text{margin} -7$ 。

L1-2: 取 $(t, r) = (2, 10)$; 两参数都至少二, 实际最大度 $2+10=12$, $\text{margin} = -(1)(9) = -9$ 。

L2: 标准证明见正式框; 评分点是先固定任意整数 $\Delta \geq 4$, 再选参数, 验证 $r \geq 2$, 引用卡 10、12、15, 最后解除“任意”得到全称结论。

L3: $\Delta = 3$ 时 $r = 1$, 超出定理假设并使 margin 因子为零, 所以这条路线不给反例。这只说明本构造证明不了; 是否存在别的构造还需其他论证。事实上原工作已证明最大度不超过 3 时猜想成立, 但那是额外定理, 不是从“本构造失败”自动推出的。

L2-2 六层答案:

1. **结果:** $H_{\Delta-2,2}$ 也是每个 $\Delta \geq 4$ 的连通反例, margin 同为 $-(\Delta - 3)$ 。
2. **定义起点:** 取 $t = \Delta - 2, r = 2$, 使用卡 10、12、15。
3. **合法性:** $\Delta \geq 4$ 保证 $t \geq 2, r = 2$; 构造连通, 实际最大度 $(\Delta - 2) + 2 = \Delta$ 。
4. **易错点:** 参数顺序改变会交换 X 数量与路径数量, 但不能未经证明说两图同构。
5. **独立复核:** 余量 $-((\Delta - 2) - 1)(2 - 1) = -(\Delta - 3) < 0$, 与正式方案数值相同。
6. **评分最低表述:** 必须先固定任意 Δ , 再选参数并逐项验证合法、连通、实际最大度、负余量; 量词链缺一项不通过。

本卡过关门

闭卷接受审查者随机给出的任意 $\Delta \geq 4$, 在两分钟内写参数、合法性、实际最大度和负余量; 再口头纠正量词顺序。能解释 $\Delta = 3$ 的边界才通过卡 16。

一天后换题: 审查者给任意 $\Delta \geq 6$, 你必须同时写出两种合法参数选择并分别验证; 不得只说“交换 t, r 显然”。

对应交互审查卡: 16 | “每个最大度至少四”的量词

3.8 卡 17: 单块加性差与对角极限: 趋近 $1/4$, 但不是固定度无界

学完本卡, 你应该能做到

学完本卡, 你能从 margin 推出单块 gap 公式, 证明对角族 $t = r = s$ 的 gap 趋于 $1/4$, 并准确说明这个极限为什么不能推出任何固定最大度下的无界违反。

前置知识: 卡 08、15, 以及分式极限和“固定参数/变化参数”的区别。

先修自测 (限时三题)

1. 由余量写出 gap 的换算式。
2. 当 $t = r = s$ 时, 实际最大度是多少?
3. “固定 Δ ”和“让 $\Delta \rightarrow \infty$ ”是否是同一实验?

三题全对再继续; 第 1 题错回卡 08, 第 2 题错回卡 12, 第 3 题错先用“固定温度/改变温度”的类比口述后复测。

新词与符号

由卡 08, gap 是 $\tau_D - \mathbf{B}_{\text{HY}} = -\mu/(\Delta^2 + 1)$ 。在本族中 $\Delta = t + r$, 所以

$$\text{gap}(H_{t,r}) = \frac{(t-1)(r-1)}{(t+r)^2 + 1}.$$

“对角族”指取 $t = r = s$, 让同一个整数 s 同时控制两个参数。

先讲人话

单块积木的越线量会随积木尺寸变化, 但一直靠近四分之一。这里积木变大时, 它的最大度也在变大; 这与“把最大度锁死, 再让图越来越大”是两种完全不同的实验。

再讲精确

代入 $t = r = s$ 得

$$g_s = \frac{(s-1)^2}{(2s)^2 + 1} = \frac{s^2 - 2s + 1}{4s^2 + 1}.$$

分子分母同除以 $s^2 > 0$:

$$g_s = \frac{1 - 2/s + 1/s^2}{4 + 1/s^2} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (s \rightarrow \infty).$$

这里箭头读作“当 s 越来越大时趋近”。每个 s 对应一张有限图, 且其实际最大度为 $\Delta = 2s$, 并没有保持固定。

跟着做一遍

s	$\Delta = 2s$	$\text{gap} = (s-1)^2/(4s^2 + 1)$	小数近似
2	4	1/17	0.0588
3	6	4/37	0.1081
5	10	16/101	0.1584
10	20	81/401	0.2020

数值逐渐靠近 0.25, 但没有一项等于 1/4, 也没有越变越无穷。

半开放演练 B 固定最大度 $\Delta = 8$, 列出所有满足 $t + r = 8$ 且 $t, r \geq 2$ 的有序参数对; 比较它们的单块 gap, 并找出最大者。

为什么这一步是真的

若固定某个 Δ , 约束 $t + r = \Delta$ 只留下有限多个整数分拆, 而且每个单块只有有限个顶点; gap 当然在这有限名单中有界。对角极限则让 $\Delta = 2s \rightarrow \infty$ 。所以它说明“大度数的单块 gap 可接近 1/4”, 不说明“固定度数的 gap 可任意大”。

最容易掉进去的坑

- 趋近 $1/4$ 不等于某个有限 s 取到 $1/4$ 。
- 有界的 $1/4$ 极限不是无界增长。
- 这里变化的是 s ，同时也改变 Δ ；不能把它用作固定 Δ 的图序列。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。计算 $s = 4$ 时的最大度和 gap，并与 $1/4$ 比较。

L1-2 数值练习。计算 $s = 7$ 时的最大度与 gap，并判断它是否已经超过 $1/4$ 。

L2-1 迁移。从 $-(t-1)(r-1)$ 和实际最大度 $t+r$ 独立推导一般 gap 公式；再完成对角极限的“同除 s^2 ”步骤。

L2-2 固定度优化。固定 $\Delta = 8$ ，在全部整数 $t+r=8, t, r \geq 2$ 中找出单块 gap 最大值；说明这仍不能证明固定度无界。

L3 解释。反驳：“因为 $s \rightarrow \infty$ 时 gap 趋于 $1/4$ ，所以在固定 $\Delta = 4$ 下 gap 可以无限大。”至少指出三处概念错误。

核对答案与推理

L1: $\Delta = 8$, $\text{gap} = 9/(64+1) = 9/65 \approx 0.1385 < 1/4$ 。

L1-2: $\Delta = 14$, $\text{gap} = (7-1)^2/(14^2+1) = 36/197 \approx 0.1827 < 1/4$ 。

L2: $\text{gap} = -\mu/(\Delta^2+1) = (t-1)(r-1)/((t+r)^2+1)$ ；令 $t=r=s$ 后同除 s^2 ， $1/s$ 与 $1/s^2$ 都趋零，极限为 $1/4$ 。

L3: 第一， s 变化时 $\Delta = 2s$ 也变化，不是固定 4；第二，趋近 $1/4$ 是有界的，不是趋于无穷；第三，固定 $\Delta = 4$ 的合法整数分拆这里只有 $t=r=2$ ，只给单一 gap $1/17$ 。要证明固定度无界，需要下一篇的重复积木机制。

L2-2 六层答案：

1. **结果：**最大值在 $(t, r) = (4, 4)$ 处，为 $9/65$ 。
2. **定义起点：**分母固定为 $8^2+1=65$ ，只需比较 $(t-1)(r-1)$ 。
3. **合法性：**有序参数为 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ ，分子依次为 $5, 8, 9, 8, 5$ 。
4. **易错点：**固定度时不能让 t, r 任意增大；它们的和已经固定。
5. **独立复核：**相邻分拆向平衡点移动时乘积先增后减，列表与“平衡乘积最大”一致。
6. **评分最低表述：**必须列完整合法分拆、比较分子并解释有限名单有界；只报 $9/65$ 不得满分。

本卡过关门

闭卷推导一般 gap 与对角极限；审查者追问“哪个参数在变、哪个没有固定、为什么不是无界”，必须三句都答准。一天后用 $s=6$ 重算并解释，才通过卡 17。

附录 A 公式地图：每一条等式从哪里来

这张地图不是背诵清单。左栏是结论，中栏是最短证据链，右栏是最容易犯的错误。若看见公式却说不出中栏，就回到相应卡片。

公式或结论	证据链	红线错误
$\tau_D(G) + \rho(G) = n$	卡 04、05 的补集双向对应，再把最小大小变为补集的最大大小	只证明一个方向
$B_{HY}(G) = \lfloor \Delta(\Delta - 1)n + 2m \rfloor / (\Delta^2 + 1)$	Henning-Yeo 原猜想； Δ 是实际最大度	用任意度上界代入
$\mu = \Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)\tau_D$	清正分母； $\mu < 0$ 恰为反例	把正负号说反
$\mu = (\Delta^2 + 1)\rho - [(\Delta + 1)n - 2m]$	代 $\tau_D = n - \rho$ ，再用握手引理	移项漏符号
$H_{t,r}$ 的 $n = t + 2r + 2$	数 a, b, X, C, D 五类顶点	漏掉 a, b
$H_{t,r}$ 的 $m = 2t + 3r + \binom{r}{2}$	X 两边、每条 $C - D$ 路三边、 D 团	团边重复计数
$\Delta(H_{t,r}) = t + r$	列五类度数并证明 a, b 达到	只给上界
$\mu(H_{t,r}) = -(t - 1)(r - 1)$	卡 15 从 deficit 式逐行化简	“整理可得”
loaded-tree: $n = qk, m = rqk/2 + k - 1$	k 个正则纤维加树的 $k - 1$ 桥	quotient 非树仍套用
$\Delta = r + L$	每点度 $r + \lambda$ ，最大 load 实际达到 L	“至多”偷换成“等于”
$\rho = k$	每纤维至多一；unused selector 每纤维至少一	漏掉任一方向
$\mu = k((r + L)^2 + 3 - (L + 1)q) - 2$	代 n, m, ρ, Δ ；追踪 $2(k - 1)$	漏掉常数 -2
$A_\Delta = +\infty, \Delta \geq 4$	Petersen 分别处理四、五； H -chain 处理六以上	与 c_Δ 混同
$H_{2,2}: 119 > 118$	$n = 8, m = 11, \Delta = 4, \tau_D = 7$	把计算最小性说成唯一性
$\rho(G) = \alpha(G^2)$	距离至少三等价于平方图中不相邻	忽略双向
$\rho/n \geq (1 + \Delta \bar{d})^{-1}$	Caro-Wei、AM-HM、charging、度平方	取倒数方向错
c_Δ 通用上界	packing 下界代入带负系数的 gap，再优化平均度	负系数方向错

公式或结论	证据链	红线错误
rook: $q = s^2, r = 2(s - 1), \text{diam} = 2$	棋盘坐标逐项证明	行列邻点重复
$s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor, L = \Delta - 2s + 2$	卡 52 证明 $s \geq 4, L \geq 2$	只试数值
$c_\Delta \geq \phi_\Delta$	对每个有限大 k 有合法图; 用 supremum 接住极限	虚构无限图
$1 - \Delta\phi_\Delta$ 精确两项式	卡 58 通分	漏 +1 或负号
$c_\Delta \geq \Delta^{-1} - 6\Delta^{-4/3}$	卡 59 分别压两项误差	floor 方向错
$\lim \Delta c_\Delta = 1$	下界给 liminf, 通用上界给 limsup, 再夹逼	声称完整二阶项

三条主证明路线

1. **反例路线**: 定义 $\rightarrow$ 补集引理 $\rightarrow$ margin $\rightarrow H_{t,r} \rightarrow$ 全 $\Delta \geq 4$ 有反例。
2. **固定度放大路线**: loaded tree $\rightarrow$ packing 精确值 $\rightarrow$ margin 斜率 $\rightarrow$ Petersen 四、五度 + 高次链 $\rightarrow A_\Delta = \infty$ 。
3. **归一化极限路线**: $G^2/\text{Caro-Wei}$ 上界 $\rightarrow$ rook fibres 下界 $\rightarrow$ supremum $\rightarrow$ 精确误差 $\rightarrow$ squeeze。

附录 B 本册总门、错题与延迟复测记录

学完本卡，你应该能做到

本记录只覆盖本册：Z00–Z14、卡 01–17。勾选不是掌握证据；必须留下闭卷答案、错因和延迟复测日期。本册红线卡为：04、05、07、08、09、12、15。

本册总门

- ☐ 1. 所有入口诊断均按逐题失败路由处理，没有带错闯关。
- ☐ 2. 每卡至少完成一个完整例 A、一个半开放例 B、L1/L2/L3 和六层答案复核。
- ☐ 3. 我能闭卷重建本册主证明链，并指出每一步依赖的定义或前卡。
- ☐ 4. 红线卡已在首次学习、24 小时后和 7 天后各通过一次。
- ☐ 5. 我能把“已证明、计算支持、文献未检出、仍待确认”分开陈述。

错题记录

日期	卡/题	我的原错答	精确错因与失败路由	换题复核结果

日期	卡/题	我的原错答	精确错因与失败路由	换题复核结果

一天后与七天后复测

卡号	首次通过	24 小时题/日 期	24 小时结果	7 天题/日期	7 天结果与错 因

记录版本：_____ 记录人：_____ 最终确认日期：_____

附录 C 零基础中英术语与符号表

符号/英文	中文	读法	精确用途
$G = (V, E)$	图	图 G	V 是顶点集合, E 是边集合
null graph	空图	null graph	$V = \emptyset$; 没有顶点也没有边, 本书约定 $\Delta = 0$
edgeless graph	无边图	edgeless graph	可以有一个或多个顶点, 但 $E = \emptyset$; 不得与空图混称
n, m	阶、边数	恩、艾姆	$n = V , m = E $
$d_G(v)$	顶点度数	v 的度	与 v 相连的边数
$\Delta(G)$	实际最大度	德尔塔	全部顶点度数最大值
$\text{dist}_G(u, v)$	距离	distance	最短路边数; 不同分量为 $+\infty$
diameter	直径	diameter	连通图中最大点对距离
$\text{trace } e \cap T$	边的指纹/迹	交集	边在选点集合上留下的端点
identifying vertex cover	识别顶点覆盖	IVC	覆盖每边且不同边 trace 不同
$\tau_D(G)$	识别顶点覆盖数	tau 下标 D	IVC 的最小大小
packing	packing/距离打包	packing	任意两点距离至少三
$\rho(G)$	packing 数	rho	packing 最大大小
$B_{HY}(G)$	猜想右端	B 下标 H-Y	Henning-Yeo 上界表达式
$\mu(G)$	整数余量	mu	清分母后的右边减左边; 负为反例
additive gap	加性缺口	gap	$\tau_D - B_{HY} = -\mu/(\Delta^2 + 1)$
deficit	增广度亏损	deficit	$\Delta + 1 - d(v)$
fibre	纤维/块副本	fibre	loaded-tree 中的一份基图
port	端口	port	承接一条外部桥的纤维顶点
load λ	负载	lambda	同一点承接的桥 incidence 数
selector	选择点	selector	未被端口使用、用于 packing 的点
rooted product	根积	rooted product	每纤维同一根承接 quotient 边
A_Δ	固定度总缺口上确界	A 德尔塔	不除顶点数; 可为无穷
c_Δ	固定度人均缺口上确界	c 德尔塔	gap 除以阶后的 supremum
G^2	平方图	G squared	原图距离至多二的点在此相邻
$\alpha(G)$	独立数	alpha	最大独立集大小
$\bar{d}$	平均度	d bar	$2m/n$
Caro-Wei	独立集下界	卡罗-魏	由随机排序得到 $\sum 1/(d+1)$

符号/英文	中文	读法	精确用途
charging	记账/注入论证	charging	把对象分配到互异 incidence 以计数
R_s	rook graph	rook graph	$s \times s$ 棋盘同行或同列相邻
$\lfloor x \rfloor$	向下取整	floor	不超过 x 的最大整数
ϕ_Δ	rook 极限下界	phi	固定 Δ 、 $k \rightarrow \infty$ 的人均值
sup	上确界	supremum	最小共同上界，不必取到
lim inf, lim sup	下极限、上极限	limit	尾部最低/最高极限水平
		inferior/superior	
$f \sim g$	首阶渐近相等	asymptotic	$f/g \rightarrow 1$
$O(\cdot)$	量级上界	big O	绝对值最终不超过常数倍
provenance	来源沿革	provenance	对象、数据或文件的可追溯来源
novelty audit	查新审计	novelty audit	记录检索范围和近先例，不证明全球首次
SHA-256	文件哈希	SHA two five six	内容指纹，用于检测版本漂移

附录 D 68 卡最终掌握清单

这份纸面清单只用于定位学习进度；正式状态以交互文件中的本人答案、证据、确认时间和版本匹配为准。不要在尚未闭卷完成时预先打勾。

A. 定义、范围与符号 (01–09)

- ☐ 1. 研究对象和边界约定；
- ☐ 2. IVC 定义；
- ☐ 3. packing 定义；
- ☐ 4. 补集引理正向；
- ☐ 5. 补集引理反向；
- ☐ 6. $\tau_D + \rho = n$ ；
- ☐ 7. 实际最大度；
- ☐ 8. margin/gap 符号；
- ☐ 9. deficit reformulation。

B. $H_{t,r}$ (10–17)

- ☐ 10. 构造；
- ☐ 11. 阶与边数；
- ☐ 12. 各类度数；
- ☐ 13. 直径穷尽；
- ☐ 14. ρ, τ_D ；
- ☐ 15. margin；
- ☐ 16. 全 $\Delta \geq 4$ ；
- ☐ 17. 对角极限。

C. loaded tree (18–27)

- ☐ 18. 全部数据;
- ☐ 19. 全部假设;
- ☐ 20. 简单连通及 n, m ;
- ☐ 21. 实际最大度;
- ☐ 22. packing 上界;
- ☐ 23. selector 下界;
- ☐ 24. ρ, τ_D ;
- ☐ 25. margin;
- ☐ 26. 斜率阈值;
- ☐ 27. 适用边界。

D. 固定度无界 (28–35)

- ☐ 28. Petersen 参数;
- ☐ 29. $\Delta = 4$ 端口和 k ;
- ☐ 30. $P_{4,k}$ 参数;
- ☐ 31. $\Delta = 5$ 同根和 k ;
- ☐ 32. $P_{5,k}$ 参数;
- ☐ 33. 高次数实际最大度;
- ☐ 34. 高次数 packing/margin;
- ☐ 35. $A_\Delta = \infty$ 。

E. 计算最小性 (36–41)

- ☐ 36. $H_{2,2}$ 手算;
- ☐ 37. graph6/同构/provenance;
- ☐ 38. 枚举宇宙;
- ☐ 39. 主 checker;
- ☐ 40. 独立 checker;
- ☐ 41. 计算边界。

F. 通用上界 (42–50)

- ☐ 42. c_Δ 与 A_Δ ;
- ☐ 43. 既有通用估计;
- ☐ 44. 平方图;
- ☐ 45. Caro–Wei;
- ☐ 46. charging;
- ☐ 47. 求和换序;
- ☐ 48. packing 密度;
- ☐ 49. 负系数代入;
- ☐ 50. 优化与 $\limsup$ 。

G. rook 与精确首阶 (51–60)

- ☐ 51. rook 参数;
- ☐ 52. floor 边界;
- ☐ 53. 任意大精确度树;
- ☐ 54. rooted rook 最大度;
- ☐ 55. packing 与 τ_D ;
- ☐ 56. 有限 k 与 ϕ ;
- ☐ 57. supremum;
- ☐ 58. 精确误差;
- ☐ 59. 显式误差界;
- ☐ 60. squeeze 与开放边界。

H. 文献与责任 (61–68)

- ☐ 61. 原问题归属/同名辨析;
- ☐ 62. 邻近参数;
- ☐ 63. 构造与 packing 先例;
- ☐ 64. 最小图 provenance/新颖性;

- ☐ 65. supplement;
- ☐ 66. 署名行政事实;
- ☐ 67. AI 披露与能力门;
- ☐ 68. 双语、版本与外发授权。

学术边界

所有 68 项均需在对应卡完成独立作答；28 张红线卡还需延迟复测。纸面勾选、完成率或 AI 的评价均不能替代本人证据与正式口试。