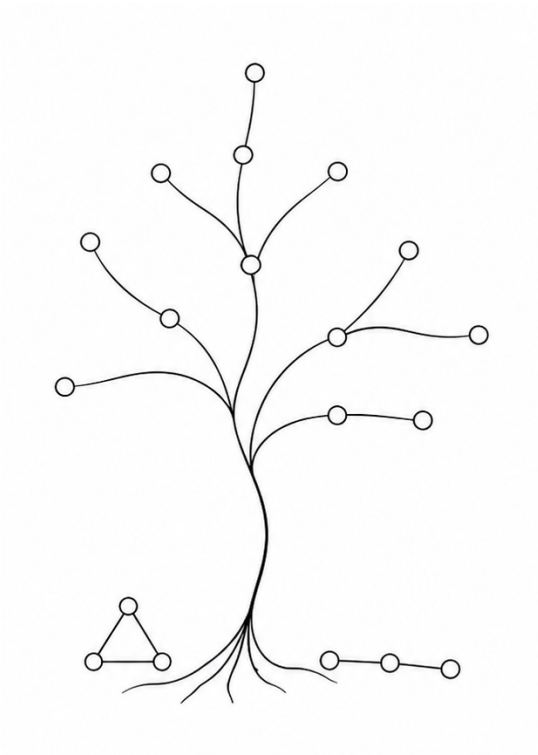
从点和线到一个猜想的终结

放大机制与固定度无界

第二册 · 卡 18–41



PROJECT π Orchard 内部学习版

从一块反例走到每个固定最大度的无界失败，并审计最小见证

2026 年 8 月 19 日 · A4 黑白双面印刷版

本册导航

学完本卡，你应该能做到

本册覆盖卡 18–41。学完并通过本册总门后，你应当能够：证明 loaded-tree 转移、处理 $\Delta = 4, 5$ 与 $\Delta \geq 6$，并解释计算最小性证据的边界。

再讲精确

开始前请确认：能闭卷复述卡 06、08、09、12、15，并能画出 $H_{2,2}$。若其中一项不能闭卷完成，请先按卡号返回相应前册复习；不要只凭“看着眼熟”跳过。

跨册引用一律使用卡号和概念名，不依赖另一册的页码。因此，不同印次或不同装订方式不会破坏学习路线。

目录

本册导航 ii

第一部分　把一个反例放大成无穷多个 1

第一章　第三篇：把许多小图装在一棵树上 2

1.1 卡 18：loaded tree 的全部数据：纤维、端口、负载与选择点 2

1.2 卡 19：loaded-tree 定理的全部假设：每一条负责什么 5

1.3 卡 20：为什么最终图简单、连通，以及怎样数出 n 和 m 8

1.4 卡 21：红线卡：实际最大度为什么恰好是 $r + L$ 11

1.5 卡 22：packing 上界：为什么同一纤维至多选一个点 13

1.6 卡 23：红线卡：unused selector 为什么给出 packing 下界 15

1.7 卡 24：夹住 packing，并由补集得到 τ_D 18

1.8 卡 25：红线卡：loaded-tree 整数余量的五行推导 20

1.9 卡 26：看懂斜率：什么时候越接越错 23

1.10 卡 27：假设边界：换成含环连接图时要重审什么 25

第二章　第四篇：每一个固定最大度都能无限违反 29

2.1 卡 28：Petersen 图：参数证明与学术归属 29

2.2 卡 29：红线卡：最大度四的不同端口与 $k \geq 2$ 边界 32

2.3 卡 30：$P_{4,k}$ 的全部参数与无界斜率 35

2.4 卡 31：红线卡：最大度五的同根方案与 $k \geq 3$ 边界 38

2.5 卡 32：$P_{5,k}$ 的全部参数：为什么分母变成 26 40

2.6 卡 33：红线卡：高次数 H-链的实际最大度 43

2.7 卡 34：高次数链的 packing 与余量加法账 45

2.8 卡 35：红线卡：量词完整地证明 $A_\Delta = +\infty$ 48

第二部分　计算证据与最小见证 **52**

第三章　第五篇：最小见证与计算证据 **53**

3.1　卡 36：$H_{2,2}$ 的手算证书 53

3.2　卡 37：`graph6`、同构与既有来源 57

3.3　卡 38：穷举宇宙的完整性 60

3.4　卡 39：主检查器：直接照定义计算 63

3.5　卡 40：独立检查器与可复现证据 66

3.6　卡 41：计算命题的精确边界 68

附录 A　公式地图：每一条等式从哪里来 **72**

附录 B　本册总门、错题与延迟复测记录 **74**

附录 C　零基础中英术语与符号表 **76**

附录 D　68 卡最终掌握清单 **78**

第一部分

把一个反例放大成无穷多个

第一章　第三篇：把许多小图装在一棵树上

前两篇研究的是一张图和一个反例积木。本篇要学习一种“批量建造”方法：先准备许多完全相同的小图，再用桥边按照一棵树的形状把它们接起来。最重要的不是图画得多大，而是我们仍能把顶点数、边数、最大度、packing 数、识别顶点覆盖数和整数余量全部精确算出。

1.1　卡 18：loaded tree 的全部数据：纤维、端口、负载与选择点

对应交互审查卡：18

前置知识：卡 01；预备篇“图”“树”“度数”和“集合大小”。若不能解释顶点、边、度数，请先回到预备篇。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能亲手画出一个三纤维 loaded tree；能指出什么是纤维、树边、桥边、incidence、端口、负载、最大负载和未使用选择点；还能根据一张端口表逐点算出负载。

先修自测（口答，不查书）

1. 一张图的度数表示什么？
2. 一棵有三个顶点的路径有几条边？
3. 两张顶点完全不重合的图，为什么叫“顶点不交的副本”？

若第 1 题不会，回预备篇“数图”；第 2 题不会，先画 $1-2-3$ 数线；第 3 题不会，就把两份点名分别加上上标 $(1),(2)$ 再比较。

先讲人话

把一张小图 R 想成一座标准小城。复制 k 座一模一样的小城，每座城内部道路完全相同。另画一棵只有“城编号”的树 T，它规定哪两座城之间要架桥。每座桥在两端都要选一个桥头房间，这个房间就是**端口**。一个房间被多少座桥使用，就是它的**负载**。每座城还要留一间完全不当桥头的房间，稍后在那里放侦察员。

新词与符号

写法或词	读法	精确意思
T	树 T	只记录各纤维如何连接的图；树是连通且没有回路的图
R_i	R 的第 i 份副本	第 i 座小城，也叫第 i 个纤维
$e = ij$	树边 e 连接 i, j	规定纤维 R_i, R_j 之间加一条桥
(i, e)	顶点–边关联	树边 e 的一个端点是 i；英文叫 incidence
$p_{i,e}$	p 下标 i, e	纤维 R_i 中供树边 e 使用的端口
$\lambda_i(v)$	lambda 下标 i	顶点 $v \in R_i$ 被多少条桥选作端口
L	大写 L	所有纤维、所有顶点负载的实际最大值
s_i	选择点 s_i	第 i 个纤维中负载为零的顶点

本篇前半部的连接图 T 是树，所以每条新加的跨纤维边删掉后都会把整图分开，确实是图论中的“桥”。卡 27 把连接图推广到含环图时，新边仍连接不同纤维，但未必再是图论意义的桥；届时会改称“跨纤维连接边”。

再讲精确

取一棵顶点为 $1, \ldots, k$ 的树 T，以及互不共享顶点的 k 份图 $R_1, \ldots, R_k$。对每个关联 (i, e)（也就是 i 是树边 e 的端点），在 R_i 中选一个端口 $p_{i,e}$。若 $e = ij$，就在两个端口之间增加桥边

$$p_{i,e}p_{j,e}.$$

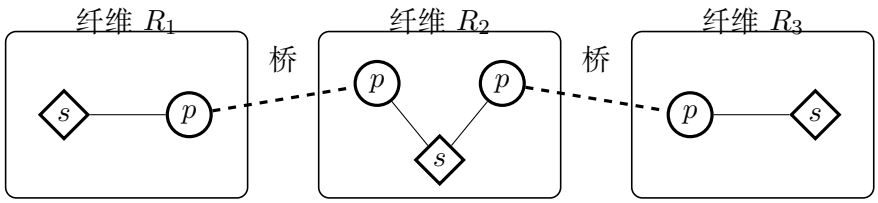
顶点 $v \in V(R_i)$ 的负载定义为

$$\lambda_i(v) = \big|\{e \in E(T) : i \in e \text{ 且} p_{i,e} = v\}\big|.$$

竖线 $|\cdot|$ 表示集合中元素的个数。最大端口负载是

$$L = \max_{i,v} \lambda_i(v).$$

若 $\lambda_i(s_i) = 0$，就称 s_i 为第 i 个纤维的**未使用选择点**（unused selector）。最终图记为 $G(T, R, p)$。



图中细实线表示纤维内部边的一个示意，较粗虚线表示后来增加的桥；圆点 p 是端口，菱形 s 是从不接桥的选择点。真正使用时，每个纤维内部会是一整份 R，不只是图中画出的两三条线。

为什么这一步是真的

为什么负载按“关联”计数，而不是只数树中相邻的纤维？因为一个树顶点可能接许多树边，而且这些边可以使用同一个端口，也可以分散到不同端口。负载关心的是某一个纤维顶点究竟接了几条新桥，所以必须逐条树边记录。

跟着做一遍

令 T 是路径 $1-2-3$。在 R_1 中，唯一桥使用顶点 u_1；在 R_2 中，左桥使用 u_2，右桥使用不同顶点 v_2；在 R_3 中使用 u_3。

逐点数：$\lambda_1(u_1)=1$；$\lambda_2(u_2)=1$、$\lambda_2(v_2)=1$；$\lambda_3(u_3)=1$；其余所有点负载为零。因此实际最大负载 $L=1$。只要每个纤维另有一个未用点，就能选 s_1,s_2,s_3。

如果把 R_2 的左右两座桥都接到同一个 u_2，那么 $\lambda_2(u_2)=2$，于是 $L=2$。图的树形连接没有改变，改变的是端口安排。

半开放演练 仍取路径 $1-2-3-4$。每个端纤维只有一个关联，每个内部纤维有两个关联。若纤维 2 的两个关联共用端口，而纤维 3 使用两个不同端口，请填空：纤维 2 的最大负载为 _____，纤维 3 的最大负载为 _____，全图 $L=$ _____。

最容易掉进去的坑

错法一： L 是树 T 的最大度。错；树顶点虽有许多关联，但可以把它们分给多个端口。L 是一个纤维顶点承担的最大桥数。

错法二： 端口和 selector 是同义词。恰好相反：端口至少承担一条指定桥，unused selector 的负载必须为零。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对半开放演练填空，并分别写出一个可作 selector 的点应满足什么条件。

L1-2 模仿。在路径 $1-2-3$ 中，让纤维 2 的两个关联使用同一端口 c。列出全部非零负载，并写出实际 L。

L2-1 迁移。画一棵四叶星：中心为 1，叶子为 $2,3,4,5$。中心纤维的四个关联中，两条桥用端口 a，另两条用端口 b。求中心纤维的负载表和全图可能的 L。

L2-2 迁移。仍取四叶星。中心的三个关联使用端口 c，余下一个使用端口 d；每个叶纤维使用一个端口。求实际 L，并写出中心纤维存在 unused selector 的最低条件。

L3 解释。向一个没学过图论的人解释：“同一棵树、同样的纤维，也可能有不同的 L。”

核对答案与推理

半开放/L1-1： 纤维 2 的共用端口负载为 2；纤维 3 的两个端口各负载 1；全图 $L=2$。selector 必须是该纤维内没有被任何关联选作端口的顶点，即负载为零。

L1-2： 两端纤维所用端口负载各为 1；纤维 2 的 c 负载为 2；其他点负载为 0，所以实际 $L=2$。

L2-1： 中心的 $\lambda_1(a)=2,\lambda_1(b)=2$，其余点为零；每个叶纤维只有一座桥，所用端口负载为 1。因此全图实际最大负载为 2。检查点是四个中心关联恰好被 a,b 各计两次，没有漏

也没有重复。

L2-2 六层答案。(1) 结果：$\lambda_1(c) = 3, \lambda_1(d) = 1$，叶端口负载 1，故 $L = 3$；中心还须至少有一个不同于 c, d 的零负载点。(2) 定义起点：负载是同一纤维顶点承担的关联数，selector 的负载必须为零。(3) 合法性：四个中心关联按 $3+1$ 恰好计完，叶子各只有一个关联。(4) 易错：把树的中心度 4 误写成 $L = 4$。(5) 复核：中心负载总和 $3+1=4$，等于中心的关联数。(6) 评分：负载表、实际最大值、selector 条件各 1 分；最低表述必须同时出现“达到 3”和“另有零负载点”。

L3 示范：树只说“哪两座城之间架桥”，没有说“桥落在城里的哪间房”。若两座桥落在同一房间，该房间负载为 2；若落在两个房间，每间负载为 1。因此端口安排会改变 L。

本卡过关门

合上讲义，画路径 $1-2-3-4$ 的两种端口方案：一种使 $L=1$，一种使 $L=2$。在图上圈出每个端口、写出全部非零负载，并为每个纤维找一个负载为零的 selector。能不看定义准确说出八个术语，才通过本卡。

一天后新题　quotient 取路径 $1-2-3-4-5$，内部纤维的两个关联分别采用“同端口、异端口、同端口”。闭卷列出所有非零负载，求实际 L，并为每份纤维指出 selector 必须满足的条件。

1.2　卡 19：loaded-tree 定理的全部假设：每一条负责什么

对应交互审查卡：19

前置知识：卡 18；预备篇“若……则……”和“删掉假设会怎样”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能完整读出 loaded-tree 传递定理的假设，并把每一条假设连接到它所保障的结论；删去某条假设时，能指出证明在哪一步断裂，而不是笼统地说“可能不成立”。

先修自测（口答）

1. 负载 $\lambda_i(v)$ 和最大负载 L 分别是什么？
2. unused selector 的负载是多少？
3. “直径至多二”对同一纤维任意两点的距离说了什么？

任何一题答不出，回卡 18 或预备篇“距离与直径”。

先讲人话

一台机器要输出六个精确数字，就必须把插头插齐。每个假设像一个插头：正则性负责统一计算内部边和原度数；直径二负责限制一座城最多一个侦察员；树负责连通和恰有 $k-1$

座桥；“最大负载确实达到”负责实际最大度；unused selector 负责每城真的能放一个侦察员。少一个插头，不一定所有结论都坏，但对应的那条线路已经没有保证。

再讲精确

传递定理的输入是：

1. 基图 R 连通；
2. R 有 q 个顶点，并且每个顶点度数都恰为 r（称为 r-正则）；
3. R 的直径至多二；
4. T 是一棵有 $k \geq 2$ 个顶点的树；
5. 端口方案的实际最大负载恰为 L，也就是既有 $\lambda_i(v) \leq L$，又至少一个点达到 L；
6. 每一个纤维都有一个负载为零的 unused selector。

在这些条件下，最终图 G 连通，并能精确求出 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D, \mu$。

假设	它在证明中负责的工作
R 连通	每座纤维内部可走通，再借树桥走遍全图
R 是 r-正则、阶为 q	每份有 $rq/2$ 条边；新度数可写成 $r + \lambda_i(v)$
$\mathrm{diam}(R) \leq 2$	同一纤维中任意两点距离至多二，所以 packing 至多取一个
T 是 k 阶树	桥把纤维连通，且桥数恰为 $k-1$
实际最大负载为 L	$r + L$ 不只是上界，而且被某点达到
每份有 unused selector	能构造大小为 k 的 packing 下界

为什么这一步是真的

数学定理说的是“若全部假设成立，则结论成立”。删去一个假设后，正确的审查方法是定位哪一行证明不再合法。它不要求剩余结论全部必然错误。例如把树换成含环连通图后，全图仍可能连通，但“桥数为 $k-1$”已经错误。

跟着做一遍

逐条做一次“拔插头实验”：

1. 把直径二改成直径三。取六边形循环 C_6，两个相对顶点距离三，同一纤维可能放两个 packing 点；“每纤维至多一个”断裂。
2. 只知道负载不超过 2，却没有点达到 2。若实际最大负载只有 1，那么最大度是 $r+1$，不能写成 $r+2$。
3. 允许 selector 当桥头。相邻两纤维的两个 selector 可能正是桥的两端，距离只有一；packing 下界断裂。

4. 把 T 的三点路径闭成三角形。桥数从 $2 = k - 1$ 变成 3，所以边数公式少算一条桥。

半开放演练 若 R 不是正则图，但仍连通且直径二，下面哪些结论仍可按原证明保留：$n = qk$、$m = rqk/2 + k - 1$、每纤维 packing 至多一个？逐项写“保留/不能直接保留”并说明一行理由。

最容易掉进去的坑

错法一：“一个定理的假设越多越好，删一个一定有反例。”不对。假设应当与证明责任匹配；有的可能还能弱化，但在没有重新证明前不能擅自删除。

错法二：“直径至多二”就是直径恰好二。完全图直径为一，也满足“至多二”，定理仍可用。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。把六条假设与以下六个关键词配对：连通、内部边数、packing 上界、桥数、实际最大度、packing 下界。

L1-2 模仿。把六条假设按“计 n, m”“证 Δ”“夹 ρ”三栏重新分类；说明纤维连通和树连通共同保障哪一项。

L2-1 迁移。假设 quotient（只看纤维编号的连接图）是一个有 k 个顶点、e 条边的连通简单图，但不一定是树。哪些参数公式需要把 $k - 1$ 改成 e?

L2-2 迁移。某方案只证明所有负载不超过 2，却没有证明负载 2 被达到；其余假设完整。逐项说明哪些参数仍精确、最大度最多能写成什么。

L3 找错。“端口表中每点负载都不超过 3，所以该图的实际最大度一定是 $r + 3$。”指出缺失的量词。

核对答案与推理

半开放：$n = qk$ 保留，因为仍有 k 份、每份 q 点；$m = rqk/2 + k - 1$ 不能直接保留，因为非正则时没有统一的 r，应改用每份真实边数；packing 上界保留，因为它只用直径至多二。

L1-1：依次是：R 连通 $\to$ 连通；r-正则 $\to$ 内部边数；直径至多二 $\to$ packing 上界；T 为树 $\to$ 桥数；负载最大值达到 L $\to$ 实际最大度；unused selector $\to$ packing 下界。

L1-2：计数栏放阶数 q、正则性 r 与树的 $k - 1$ 条边；最大度栏放原度数 r 与“实际最大负载恰为 L”；packing 栏放直径至多二与每份 unused selector。纤维连通和树连通共同保障最终图连通。

L2-1：顶点数仍为 qk；桥数由 $k - 1$ 改为 e，所以 $m = rqk/2 + e$。余量中所有来自 $2m$ 的桥贡献也相应变为 $2e$。负载分布可能因 quotient 度数改变，必须重新核对实际 L。

L2-2 六层答案。(1) 结果：n, m, ρ, τ_D 在其他假设完整时仍由原证明得到；最大度只能保证 $\Delta \le r + 2$。(2) 定义起点：$\Delta = \max_{i,v}(r + \lambda_i(v))$。(3) 合法性：全称上界给每点度数至多 $r + 2$，但没有存在点达到。(4) 易错：把“负载上界 2”当作“实际最大负载 2”。(5) 复核：若真实最大负载只有 1，则实际最大度是 $r + 1$，直接反驳等号。(6) 评分：指出保留结论 2 分、写正确不等式 1 分、说明达到点缺失 2 分；最低表述必须含“至多”而非“恰为”。

L3：“对所有点 $\lambda_i(v) \le 3$”只给上界。还缺少“存在某个 i, v 使 $\lambda_i(v) = 3$”。没有达到点时只能说 $\Delta \le r + 3$，不能说等于。

本卡过关门

闭卷写出六条假设，并在每条右边写一条它负责的证明步骤。然后任选两条假设，给出删掉后具体断裂的例子或公式。不能只背清单，必须说出因果关系。

一天后新题 给一份加载方案审计表：纤维连通正则且直径二，quotient 是树，每份有 selector，但报告只写“负载至多 3”。闭卷判断哪些结论可直接签字、哪一个必须补达到见证。

1.3 卡 20：为什么最终图简单、连通，以及怎样数出 n 和 m

对应交互审查卡：20

前置知识：卡 18–19；预备篇“简单图”“连通”和“握手引理”。本卡会从头证明树有 $k-1$ 条边。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能证明 loaded tree 没有自环和重复边、整张图连通；能逐类数出

$$n = qk, \qquad m = \frac{rqk}{2} + k - 1,$$

并解释每一项来自哪里。

先修自测（口答）

1. r-正则、q 个顶点的图，度数总和是多少？
2. 为什么边数是度数总和的一半？
3. 画路径 $1-2-3-4$，直接数出它有几条边；此时先不要求会一般公式。

答不出前两题回预备篇握手引理；第 3 题应直接数出三条边。一般的 $k-1$ 公式及理由在下文现学。

先讲人话

每座标准小城有 q 间房。复制 k 座，房间总数就是 q 重复加 k 次。道路分两本账：一本记每座城内部道路，另一本记城与城之间的桥。绝不能把桥混进内部道路再重复计数。

再讲精确

因为每个纤维有 q 个顶点，且不同纤维顶点不重合，所以

$$|V(G)| = \underbrace{q + q + \cdots + q}_{k\text{ 份}} = qk.$$

每个 R_i 是 r-正则、阶为 q。握手引理给每份内部边数

$$|E(R_i)| = \frac{rq}{2}.$$

k 份共有 $rqk/2$ 条内部边。树 T 有 $k-1$ 条树边，每条树边只增加一条桥，因此

$$|E(G)| = \frac{rqk}{2} + k - 1.$$

为什么这一步是真的

为什么 k 个顶点的树恰有 $k-1$ 条边？先看一棵至少有两个顶点的有限树，选一条不能再延长的最长路。它的端点只能连接这条路上的下一个点：若还连接路外一点，最长路就能延长；若还连接路内另一个非相邻点，就会围成一个环。故端点的度数为一，这种点叫叶子。

删去一片叶子和它唯一的边后，剩下的图仍连通：任取两个没被删的点，它们原来的连接路不可能把叶子当作中途站，因为叶子只有一条边，走进叶子就没有另一条边可供走出。剩下的图也仍无环，因为删边不可能制造新环。因此剩下的图仍是一棵树。不断这样删，每删一个顶点恰删一条边；从 k 个顶点删到只剩一个顶点，共删 $k-1$ 次，所以原树有 $k-1$ 条边。

为什么这一步是真的

简单性：内部每份 R_i 已是简单图。桥连接两个不同纤维，所以不会从一个点回到自己。树的每一对纤维至多由一条树边相连，而每条树边只加一条桥，因而不会与另一座桥重复；桥也不可能与内部边重复，因为内部边的两端在同一纤维。

连通性：同一纤维内部由 R 的连通性走通。不同纤维编号在树 T 中有一条路；沿着这条树路，在每个纤维内走到相应端口并过桥，就能从任意起点走到任意终点。

跟着做一遍

令 $R = C_5$，即五个顶点围成五边形。它有 $q = 5$，每点度数 $r = 2$，所以每份内部边数为 $2 \times 5/2 = 5$。取 $k = 4$，让四份沿任意四点树连接。树有 3 条边，故

$$n = 5 \times 4 = 20, \qquad m = 5 \times 4 + 3 = 23.$$

独立检查：把四个五边形的 20 条边涂实线，把三座桥涂虚线，共 23 条；两类没有重叠。

半开放演练　设 R 是 3-正则、8 阶图，$k = 5$。每份内部边数为 _____，五份共有 _____ 条，树桥有 _____ 条，所以 $n =$ _____、$m =$ _____。

最容易掉进去的坑

错法一： $m = rqk + k - 1$。这把每条内部边按两个端点数了两次，漏除以 2。

错法二： 树连通，所以不用假设 R 连通。若某个纤维内部有一座不含任何端口的孤岛，树桥也无法把孤岛接出去。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 模仿。取 $q = 6, r = 2, k = 4$，计算 loaded tree 的 n, m，并分别写出内部边与桥边的贡献。

L2-1 迁移。取 $R = K_4$（四个点两两相连），$k = 6$。先自己求 q, r，再求 n, m。

L2-2 迁移。不引用“树有 $k - 1$ 条边”作为口号：用删叶归纳证明它，再据此重新推出 loaded tree 的边数公式。

L3 解释。quotient 是有 k 个顶点、e 条边的连通简单图而不是树时，写出新边数公式，并解释哪些简单性、连通性论证仍成立。

核对答案与推理

半开放/L1-1： 每份有 $3 \times 8/2 = 12$ 条内部边；五份共 60 条；树有 $5 - 1 = 4$ 座桥；$n = 8 \times 5 = 40$，$m = 60 + 4 = 64$。

L1-2： $n = 6 \cdot 4 = 24$。每份内部边为 $2 \cdot 6/2 = 6$，四份共 24 条；树桥为 3 条，所以 $m = 27$。

L2-1： K_4 有 $q = 4$，每点与其余三点相连，所以 $r = 3$。每份内部边为 $3 \times 4/2 = 6$，故 $n = 24$，$m = 6 \times 6 + (6 - 1) = 41$。

L2-2 六层答案。(1) 结果：任意 k 点树有 $k - 1$ 条边，故 $m = k(rq/2) + (k - 1)$。(2) 定义起点：非空有限树有叶；删去一片叶及其唯一关联边，余图仍是树。(3) 合法性：归纳假设给余树 $k - 2$ 条边，加回唯一叶边得到 $k - 1$；内部边与桥边不重叠。(4) 易错：删叶后忘记同时少一条边，或把桥计入内部边。(5) 复核：$k = 1, 2, 3$ 分别给 $0, 1, 2$ 条树边。(6) 评分：归纳起点 1 分、删叶合法 2 分、边数和总公式各 1 分；最低表述必须解释为何恰少一条边。

L3： $m = rqk/2 + e$。若 quotient 连通，沿 quotient 路仍能在纤维之间移动，所以连通性证明保留；若 quotient 是简单图且每条 quotient 边只加一座桥，桥仍不自环、不重复。不过 e 不再等于 $k - 1$，负载也须重新计算。

本卡过关门

不看公式，先用一句话说出“内部边账”和“桥边账”，再从握手引理推出 $rq/2$，最后写出 n, m。换成 $(q, r, k) = (10, 3, 7)$ 时，应在 90 秒内得到 $n = 70, m = 111$，并能说出为什么图连通且简单。

一天后新题　纤维换成 5 个顶点的 4-正则图，取 $k = 7$。闭卷从握手引理和树边数分别计算两本边账，再给 n, m；不得直接套最后公式。

1.4 卡 21：红线卡：实际最大度为什么恰好是 $r+L$

对应交互审查卡：21（红线卡）

前置知识： 卡 18–20、卡 07“实际最大度”；预备篇“最大值要有上界和达到点”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从负载表证明每个点的度数为 $r+\lambda_i(v)$；能分别证明最大度“不超过 $r+L$”和“至少达到 $r+L$”；能识别把标称负载上界误当实际最大负载的致命错误。

先修自测（口答）

1. R 是 r-正则是什么意思？
2. 负载 $\lambda_i(v)$ 数的是什么？
3. 要证明一组数的最大值等于 M，哪两个方向都要写？

第 3 题的答案必须是“所有数不超过 M，且至少一个数等于 M”。逐题失败路由：第 1 题错回卡 19 的“正则纤维”；第 2 题错回卡 18 的负载表；第 3 题错回卡 07 与预备篇“最大值的上下两向”。三题全对后，把 $r=4, L=2$ 换入并口述“至多六且有人等于六”作为入口复测键。

先讲人话

每间房在原小城里都有 r 条内部道路。后来它若承担 λ 座桥，就再多 λ 条路。因此新繁忙度是“原来的 r 加上新桥数”。想宣布最繁忙房间有 $r+L$ 条路，既要保证没人超过它，也要真的找到一间达到它。

再讲精确

对任意 $v \in V(R_i)$，原来在 R_i 中有 r 条内部边。端口方案又恰好给它增加 $\lambda_i(v)$ 条桥，因此

$$d_G(v) = r + \lambda_i(v). \tag{1.1}$$

由 $\lambda_i(v) \le L$，每个点满足 $d_G(v) \le r+L$，所以 $\Delta(G) \le r+L$。又因为 L 是实际最大负载，存在某个 v_* 使 $\lambda_i(v_*) = L$；于是 $d_G(v_*) = r+L$，所以 $\Delta(G) \ge r+L$。两个方向合并：

$$\boxed{\Delta(G) = r + L.}$$

为什么这一步是真的

式 (1.1) 没有漏边：一条与 v 相连的边只有两类。若另一端仍在 R_i，它是原内部边，共 r 条；若另一端在别的纤维，它必是某个把 v 选作端口的树边所加桥，共 $\lambda_i(v)$ 条。两类互不重叠。

跟着做一遍

令基图为 C_5，故 $r=2$。四个纤维沿路径连接：端纤维各有一个负载 1 的端口；第二个纤维的两座桥共用顶点 u，所以 $\lambda_2(u)=2$；第三个纤维的两座桥用不同端口，各负载 1。所有负载都不超过 2，而且 u 达到 2，所以 $L=2$，

$$\Delta(G)=2+2=4.$$

u 的新度数确为四；只有一座桥的端口新度数为三；unused 点仍为二。

半开放演练 基图是 3-正则。端口表的非零负载为 $1,1,2,2,1$。请完成：所有新度数至多 3+____；因为有点负载等于 ____，所以最大度恰为 _____。

最容易掉进去的坑

错法一： 设计者说“负载上限设为 3”，就代 $L=3$。若表中最高只有 2，实际最大度是 $r+2$。Henning–Yeo 公式必须代图的实际最大度，代错会同时改变分子和分母。

错法二： 找到一个点度数 $r+L$ 就结束。还需证明没有点更高；这一步来自所有负载都不超过 L。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练，并列出负载为 0、1、2 的点的新度数。

L1-2 模仿。设 $r=4$，某负载表只出现 $0,1,2$ 且 2 被达到。列出可能的新度数并求实际最大度。

L2-1 迁移。某 4-正则纤维方案声称“最大负载至多 3”，实际负载表最高为 2。求实际最大度；若错误代成 7，会错在哪个量词?

L2-2 迁移。已知所有负载不超过 3，但表中最高只找到 2；原纤维 5-正则。分别写出“仅凭上界”与“查看完整负载表后”能得到的最大度结论。

L3 反例设计。画一个端口安排，满足所有负载 ≤ 2，但没有点负载 2。用它反驳“负载上界为二就必有 $\Delta=r+2$”。

核对答案与推理

半开放/L1-1： 最大负载是 2；所有度数至多 $3+2$；达到点存在，所以最大度是 5。负载 0、1、2 的点新度数分别为 3、4、5。

L1-2： 新度数分别为 $4,5,6$；负载 2 被达到，所以实际最大度为 6。

L2-1： 实际 $L=2$，最大度 $4+2=6$。错误陈述只有“对所有点负载不超过 3”，缺少“存在点负载等于 3”。因此 7 只是未必紧的上界。

L2-2 六层答案。(1) 结果：仅凭负载 ≤ 3 得 $\Delta\le 8$；完整表最高为 2 时得 $\Delta=7$。(2) 定义起点：每点新度数为 $5+\lambda_i(v)$，最大度取这些数的最大值。(3) 合法性：全体负载上界给度数上界；最高负载 2 的达到点给反向下界。(4) 易错：把允许上限 3 当作实际最大负载。(5) 复核：直接对最高点算 $5+2=7$，其余点不超过 7。(6) 评分：两个不同结论各 1 分、上界/达到理由各 1 分、量词纠错 1 分；最低表述必须写出 ≤ 8 与 $=7$ 的条件差异。

L3：取两座纤维仅用一座桥；桥两端各有一个端口负载 1，其余点负载 0。由这张完整负载表，每个负载都属于 $\{0,1\}$，因而都不超过 2，却没有点达到 2；所以实际最大度是 $r+1$ 而非 $r+2$。

本卡过关门

闭卷写出式 $d_G(v) = r + \lambda_i(v)$，并用“任意点上界 + 存在达到点”两段证明 $\Delta = r + L$。然后让别人随口给一个负载上界，你必须先问：“这个值真的被某个点达到吗?”红线复测：24 小时后用 $(r, L) = (5, 3)$ 重写同一证明，不得只报答案 8。

七天后红线复测（独立题面）：一份四正则纤维的端口负载表为 $0, 2, 1, 2, 0, 1$。证明乘积的实际最大度；再判断把“负载至多三”当成 $L = 3$ 会错在哪里。**自校验键：**实际最大负载是二，故每点度至多 $4 + 2 = 6$，且两个负载二的点达到六，所以 $\Delta = 6$。三只是松上界，没有点达到，不能宣布实际最大度七。

1.5 卡 22：packing 上界：为什么同一纤维至多选一个点

对应交互审查卡：22

前置知识：卡 03、18–19；预备篇“距离”“直径”“最大值的上界”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从“每个纤维直径至多二”严格推出任意 packing 在每个纤维中至多含一个顶点，从而证明 $\rho(G) \le k$；还会给出直径放宽为三时的具体失败例。

先修自测（口答）

1. packing 中两个不同顶点的距离至少是多少?
2. 直径至多二是什么意思?
3. 向图中增加边会把原有最短距离变长还是只可能变短?

答案应为：至少三；同一图中任意两点距离不超过二；只可能变短或不变。逐题失败路由：第 1 题错回卡 03；第 2 题错回卡 19 的直径假设；第 3 题错回 Z05“最短路”。入口复测键：给一个直径二纤维随意加边，仍须答出“同纤维两选点距离不超过二”。

先讲人话

一座纤维小城很紧凑：任意两间房最多走两条路。packing 的侦察员却规定彼此至少隔三步。因此同一座城不可能同时放两名侦察员。共有 k 座城，所以全图最多放 k 名。

再讲精确

设 S 是 G 中任意一个 packing。反设同一纤维 R_i 中有两个不同点 $x, y \in S$。由于 R 的直径至多二，R_i 内有一条长度至多二的 x–y 路。这条内部路在加桥后的 G 中仍存在，所以

$$\mathrm{dist}_G(x, y) \le 2.$$

但 S 是 packing，要求不同成员距离至少三，矛盾。因此每个纤维至多贡献一个点。k 个纤维合计给出

$$|S| \le k.$$

这对每个 packing 都成立，故最大 packing 大小满足 $\rho(G) \le k$。

为什么这一步是真的

证明只需要一条在 G 中真实存在的短路，不必证明它仍是唯一最短路。加桥可能提供更短捷径，但这只会让距离更小，更不可能达到 packing 所需的三。

跟着做一遍

取纤维 $R = C_5$，五个点排成五边形。任意两点要么相邻，距离一；要么隔一个点，距离二，所以直径为二。无论桥接在何处，同一份 C_5 中选两点，其在最终图中的距离仍不超过二。因此四个 C_5 纤维的 loaded tree，任意 packing 至多四点。

半开放演练 设 S 在 $k = 6$ 个直径二纤维中分别取了点数 $2, 0, 1, 1, 0, 1$。不用继续看其余纤维，为什么已经知道 S 不是 packing?

最容易掉进去的坑

错法一：“每个纤维至多一个，所以 $\rho = k$。”这里只证明了 $\rho \le k$。要证明等号，还必须实际构造一个大小为 k 的 packing，下一卡完成。

错法二：直径三也差不多。取六边形 C_6，两个相对点距离恰为三，可以同时属于 packing；一纤维至多一个的论证立刻失效。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练，并把矛盾写成一行不等式。

L1-2 模仿。已知每个纤维直径至多二，共有 9 个纤维。只证明 packing 上界，并写出结论中的量词。

L2-1 迁移。两个纤维分别是完全图 K_4（直径一）和五边形 C_5（直径二），加桥后同一纤维 packing 至多几个点？说明两个答案为何相同。

L2-2 迁移。把纤维换成 C_6。判断“每纤维至多一个 packing 点”的原证明在哪一步失效，并给出一对仅凭纤维内部距离无法排除同时入选的点；不要在未检查跨纤维捷径前断言它们已构成全图 packing。

L3 反例。在 C_6 中写出一对距离三的顶点，证明“直径至多三也能推出每纤维至多一个”是错的。

核对答案与推理

L1-1： 第一个纤维已经取两点 x, y；由直径二得 $\mathrm{dist}_G(x, y) \le 2 < 3$，违反 packing 定义。
L1-2： 对任意 packing 和任意纤维，若其中有两点就与直径二矛盾，故每纤维至多一点；九个纤维合计 $\rho \le 9$。
L2-1： 都至多一个。K_4 内两点距离一，C_5 内两点距离至多二，两者都小于三。
L2-2 六层答案。(1) 结果：原上界证明失效；C_6 中的对顶点 $0, 3$ 在纤维内部距离为 3，不能由原矛盾排除。(2) 定义起点：packing 要求的是全图中不同点距离至少三。(3) 合法性：纤维内 $\mathrm{dist}_{C_6}(0, 3) = 3$，所以“纤维直径小于三”这个关键前提消失；若要声称二者真能同时进入全图 packing，还必须检查新增桥是否产生更短路。(4) 易错：把“原证明失效”误写成“全图中一定存在两点 packing”。(5) 复核：沿六环两方向从 0 到 3 都需三条边；跨纤维捷径则另行核对。(6) 评分：指出断裂前提 2 分、给点对与纤维内距离 2 分、保留全图检查 1 分；最低表述必须区分“不能排除”与“已经构成”。
L3： 把 C_6 顶点顺次标为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$。点 $0, 3$ 沿任一方向都要三条边，故距离三，集合 $\{0, 3\}$ 在单个纤维内部已经满足 packing 的两点距离要求。

本卡过关门

合上讲义，用反证法写出不超过六行的 $\rho \le k$ 证明，必须出现“任意 packing”“同一纤维”“直径至多二”和“矛盾”四个关键环节。然后用 C_6 说明假设为何不能直接放宽为三。

一天后新题 给 7 个纤维，其中六个直径二、一个是 C_6。闭卷说明原来的 $\rho \le 7$ 证明为何不能整段照搬，并给出仍然成立的局部上界。

1.6 卡 23：红线卡：unused selector 为什么给出 packing 下界

对应交互审查卡：23（红线卡）

前置知识： 卡 18、22；预备篇“路长”和“证明下界要构造对象”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能逐段证明不同纤维的 unused selector 距离至少三，构造大小为 k 的 packing，从而得到 $\rho(G) \ge k$；还能精确解释 selector 一旦当桥头，证明为何可能失败。

先修自测（口答）

1. unused selector 的负载为何必须是零？
2. 证明最大值至少为 k，应当构造什么？
3. 从一个纤维到另一个纤维，至少要经过哪一类边？

若第 2 题答成“排除更大对象”，请回预备篇“选点问题”纠正上下界方向。逐题失败路由：第

1 题错回卡 18 的 selector/负载定义；第 2 题错回 Z08 “证明下界要构造合法对象”；第 3 题错回卡 18 的跨纤维桥定义。入口复测键：用三纤维路径口述 “内部一步 + 桥一步 + 内部一步”。

先讲人话

每座城把侦察员放在一间从不当桥头的房间。去另一座城时，他至少要：先在本城走一步到桥头；再过至少一座桥；最后在目标城从桥头走一步到侦察员。就是 “内部一步 + 桥一步 + 内部一步”，总计至少三步。

再讲精确

在每个纤维 R_i 选一个 unused selector s_i，令

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}.$$

取任意 $i \neq j$，考虑任意一条从 s_i 到 s_j 的路。

1. 它要离开 R_i，必须从某个端口过第一座桥。因为 s_i 的负载为零，s_i 不是任何桥端口，所以到第一端口前至少走一条内部边；
2. 不同纤维之间至少要过一座桥；
3. 最后一座桥到达 R_j 的端口。因为 s_j 也不是端口，从该端口到 s_j 至少再走一条内部边。

所以任意 s_i–s_j 路的长度至少为 $1 + 1 + 1 = 3$，即 $\mathrm{dist}_G(s_i, s_j) \geq 3$。因此 S 是大小 k 的 packing，故

$$\rho(G) \geq k.$$

为什么这一步是真的

这里证明的是任意路径都至少三步，不只是画出一条三步路。第一和最后的内部边不能省，是因为 selector 不接任何桥；中间的桥不能省，是因为起终点在不同纤维。哪怕两个纤维在树中隔得更远，只会经过更多桥，距离不会小于三。

跟着做一遍

三份 C_5 沿路径相连。每份挑一个不当桥头的点 s_1, s_2, s_3。相邻纤维 s_1, s_2 之间至少三步；s_1, s_3 必须过两座桥，还要两端内部各一步，至少四步。因此三点两两距离至少三，形成 packing。我们已经真的找到了三点，所以这是 “至少三” 的证据。

半开放演练 若两个相邻纤维的选择点恰好都是那座桥的端口，它们的距离是 ____；若只有起点是端口而终点不是，距离可能只有 ____。这说明哪个假设不能省？

最容易掉进去的坑

错法一：“树上不同编号距离至少一，所以 selector 距离至少一，差不多够了。” packing 要求至少三，必须把两端内部步骤也计入。

错法二：只检查相邻纤维。证明本身应取任意 $i \neq j$；相邻情形给最短的三步，非相邻情形只会更长。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练，并写出失败的具体路。

L1-2 模仿。 quotient 是五点路径。相邻两纤维各取 unused selector，按“内部–桥–内部”写出任意连接路的长度下界。

L2-1 迁移。 quotient 是一棵四叶星。中心和叶纤维各选 unused selector。证明任意两片不同叶子的 selector 距离至少四。

L2-2 迁移。若起点 selector 实际承担一座桥、终点仍未使用，构造一条可能只有两步的路，并指出 packing 下界证明失去了哪一端的内部一步。

L3 解释。不使用“显然”二字，向小学生解释为什么“负载为零”同时保障起点端和终点端各贡献一步。

核对答案与推理

半开放/L1-1：若两者都是桥端口，桥本身把它们相连，距离一；若只有起点是端口，则过桥后再走一条内部边即可到终点，可能距离二。说明 unused selector（负载零）条件不能省。

L1-2：离开起点 selector 前至少一条内部边，跨相邻纤维至少一座桥，到终点 selector 前至少一条内部边，所以任意路长至少 $1+1+1=3$。

L2-1：从第一片叶纤维的 selector 先走内部边到端口（至少 1），过桥到中心（1），在中心走到通往另一叶的端口（可能为 0 或更多），再过第二座桥（1），最后走到另一叶 selector（至少 1），总长至少 $1+1+0+1+1=4$。

L2-2 六层答案。(1) 结果：可出现“起点端口–桥–终点 selector”的两步路，故不能保证距离至少三。(2) 定义起点：unused selector 必须负载零；packing 点对距离至少三。(3) 合法性：起点既是端口时无需先走内部边，桥后只需在终点纤维走一步。(4) 易错：仍机械写 $1+1+1$，忽略第一项已经变成 0。(5) 复核：画两纤维一桥的小图即可数出两条边。(6) 评分：具体路 2 分、指出丢失起点内部步 1 分、packing 后果 1 分、条件纠正 1 分；最低表述须明确“负载非零使第一段可为零”。

L3：负载零表示房间没有桥直接连出去。因此离开它所在城市前，必先沿城市内部道路到某桥头；到另一城市时，桥先落在桥头，而目标房间也不是桥头，必须再走内部道路。两端各贡献至少一步。

本卡过关门

闭卷画出“内部边–桥–内部边”三段路径并写成全称证明：对任意 $i \neq j$、对任意 s_i–s_j 路，长度至少三。然后构造 selector 当端口导致距离一的反例。24 小时后换成星形 quotient 再证明一次。

七天后红线复测（独立题面）：三份直径至多二的纤维按路径连接；每份 selector 都不是端口，但它到本份任一端口的距离只保证至少一。证明三个 selector 构成 packing，并说明若第二份 selector 被用作两个桥的共同端口会怎样。**自校验键：**跨相邻纤维的任意 selector

路至少含“内部一步 + 桥一步 + 内部一步”，长度至少三；不相邻只会更长。因此三点两两距离至少三。若中间 selector 本身是端口，它到相邻纤维 selector 可能只有“桥 + 内部”两步，packing 证明失效。

1.7 卡 24：夹住 packing，并由补集得到 τ_D

对应交互审查卡：24

前置知识： 卡 06、22–23；预备篇“证明等号必须同时有上界和下界”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能不引用结论口号，亲自重建

$$\rho(G) = k, \qquad \tau_D(G) = (q-1)k,$$

并能指出两个等号分别用了哪两条上游事实。

先修自测（口答）

1. 卡 22 给 ρ 的哪个方向?
2. 卡 23 给哪个方向?
3. 补集引理给 τ_D 与 ρ 的什么关系?

正确答案是 $\rho \le k$、$\rho \ge k$、$\tau_D + \rho = n$。逐题失败路由：第 1 题错回卡 22；第 2 题错回卡 23；第 3 题错回卡 06。入口复测键：给 $q = 7, k = 4$，必须先夹出 $\rho = 4$，再算 $\tau_D = 24$。

先讲人话

“每城最多一名侦察员”把人数压到 k 以下；“每城确实找到一间安全房”又把人数推到 k 以上。上下两块板夹在同一个数 k，所以最大 packing 只能等于 k。再把这些侦察员从全部房间中删去，剩下的点正好构成最小识别顶点覆盖。

再讲精确

由卡 22，任意 packing 每纤维至多一个，故 $\rho(G) \le k$。由卡 23，unused selectors 构成大小 k 的 packing，故 $\rho(G) \ge k$。于是

$$\rho(G) = k.$$

卡 20 已知 $n = qk$。补集引理 $\tau_D(G) + \rho(G) = n$ 给出

$$\tau_D(G) = n - \rho(G) = qk - k = (q-1)k.$$

为什么这一步是真的

第二个等号不是“每份删一个点，所以看起来对”。它依赖已经证明的全局恒等式 $\tau_D = n-\rho$。这条恒等式同时包含可行性与最优性；若只拿 selector 的补集，只能构造一个大小 $(q-1)k$ 的识别覆盖，还需补集引理保证没有更小的。

跟着做一遍

四个五边形纤维中，$q = 5, k = 4$。卡 22 说 packing 最多四点，卡 23 的四个 selectors 确实可取，所以 $\rho = 4$。总顶点 $n = 20$，故

$$\tau_D = 20 - 4 = 16 = (5-1) \times 4.$$

检查：selector 集合的补集含每城其余四点，共 16 点。

半开放演练 若 $q = 10, k = 7$，先写两条不等式夹出 $\rho =$ ____，再由 $n =$ _____ 得 $\tau_D =$ _____。

最容易掉进去的坑

错法一： 只构造 selectors 就写 $\rho = k$。构造只给 $\rho \geq k$。

错法二： $\tau_D = qk + k$。补集是从全部顶点中减去 packing，不是加上它。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 模仿。取 $q = 6, k = 4$，已知同纤维上界和 selector 下界都成立。求 n, ρ, τ_D。

L2-1 迁移。取 $q = 8, k = 5$，不用传递定理名称，完整写出 ρ, τ_D 的证明链。

L2-2 迁移。只保留“每纤维直径二”，删去 unused selector 假设。说明 $\rho \leq k$、$\rho = k$、$\tau_D = (q-1)k$ 三句中哪些仍可证明。

L3 解释。为什么“直径二”只负责 $\rho \leq k$，而不能代替 unused selector 给出 $\rho \geq k$?

核对答案与推理

L1-1： $\rho \leq 7$ 且 selectors 给 $\rho \geq 7$，所以 $\rho = 7$；$n = 70$，$\tau_D = 70 - 7 = 63$。

L1-2： $\rho \leq 4$ 与 $\rho \geq 4$ 夹得 $\rho = 4$；$n = 6 \cdot 4 = 24$，故 $\tau_D = 24 - 4 = 20$。

L2-1： 同纤维任意两点距离至多二，所以 packing 每份至多一点，$\rho \leq 5$；每份 unused selector 两两距离至少三，构成五点 packing，$\rho \geq 5$；故 $\rho = 5$。总点数 $n = 8 \times 5 = 40$，由补集引理 $\tau_D = 40 - 5 = 35$。

L2-2 六层答案。(1) 结果：仍有 $\rho \leq k$；不能推出 $\rho = k$，因此也不能推出 $\tau_D = (q-1)k$。(2) 定义起点：最大值等号需上界和同值可行构造；补集引理是 $\tau_D = qk - \rho$。(3) 合法性：直径二只排除同纤维取两点，selector 缺失使大小 k 的构造消失。(4) 易错：把“至多每块一个”误读成“每块必能选一个”。(5) 复核：若某些纤维所有候选离别块候选过近，最大 packing 可小于 k。(6) 评分：保留上界 1 分、指出等号缺口 2 分、说明 τ_D 依赖 1 分、最低表述 1 分；最低表述不得写未经证明的等号。

L3： 直径二只排除“同一纤维取两个”，没有自动告诉我们不同纤维该选哪些点，也没有保证所选点相距三。unused selector 正是提供可行构造的额外条件。

本卡过关门

闭卷重建四句话：每纤维至多一个；selectors 每纤维给一个；因此 $\rho = k$；由 $n = qk$ 和补集引理得 $\tau_D = (q-1)k$。任何一句若只写结论不写理由，均不算通过。

一天后新题 取 $q = 9, k = 6$，闭卷分别写 packing 上界证明与 selector 下界证明，再求 ρ, τ_D；题解中不得只引用“传递定理”。

1.8 卡 25：红线卡：loaded-tree 整数余量的五行推导

对应交互审查卡：25（红线卡）

前置知识： 卡 09、20–24；预备篇“括号、通分、逐行化简”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从 deficit 形式逐行推出

$$\mu(G) = k\big((r+L)^2 + 3 - (L+1)q\big) - 2,$$

能解释常数 -2 从哪里来，并能用原始余量定义作独立复核。

先修自测（口答）

1. 写出 n, m, Δ, ρ 的四个 loaded-tree 参数。
2. deficit 形式的余量是什么？
3. 为什么 $2m = rqk + 2(k-1)$？

本卡代数较密；任何一项答不出先回卡 09、20、21、24。

新词与符号

为避免一行中反复出现 $r + L$，暂记

$$D = r + L.$$

D 不是新假设，它就是已经证明的实际最大度 $\Delta(G)$。

先讲人话

这一卡只做一件事：把已经逐项点清的五张“参数卡”插进同一个余量公式。像整理购物账单一样，每一行只允许一次动作：先代入，再合并 qk 项，再把 $D - r$ 换成 L，最后才提取 k。只要保留括号，尾部的 -2 就不会神秘消失。

再讲精确

从卡 09 的 deficit 恒等式开始：

$$\mu(G) = (D^2+1)\rho - \big((D+1)n - 2m\big).$$

逐项代入 $\rho = k, n = qk, m = rqk/2 + k - 1$：

$$\begin{aligned}\mu(G) &= (D^2+1)k - \Big((D+1)qk - \big(rqk + 2(k-1)\big)\Big)\\ &= (D^2+1)k - \Big((D+1-r)qk - 2k + 2\Big)\\ &= (D^2+1)k - \Big((L+1)qk - 2k + 2\Big)\\ &= k\big(D^2 + 3 - (L+1)q\big) - 2\\ &= \boxed{k\big((r+L)^2 + 3 - (L+1)q\big) - 2}.\end{aligned}$$

第三行使用 $D+1-r = (r+L)+1-r = L+1$。末尾的 -2 来自树的桥数是 $k-1$：$2(k-1) = 2k-2$ 中的常数 -2 最终保留下来。

为什么这一步是真的

余量中的 $2m$ 意味着每新增一座桥，余量增加 2。树有 $k-1$ 座桥，不是 k 座，所以与“每个纤维一份”的线性项相比，最后永远少恢复 2 个单位；这正是公式尾部 -2 的结构来源。

跟着做一遍

取 $(q, r, L, k) = (10, 3, 1, 7)$。先算

$$n = 70, \quad m = \frac{3\cdot 10\cdot 7}{2} + 6 = 111, \quad D = 4, \quad \rho = 7, \quad \tau_D = 63.$$

传递公式给

$$\mu = 7(4^2 + 3 - 2\cdot 10) - 2 = 7(-1) - 2 = -9.$$

独立用原始定义复核：

$$4\cdot 3\cdot 70 + 2\cdot 111 - 17\cdot 63 = 840 + 222 - 1071 = -9.$$

两条路线相同，所以加性 gap 为 9/17。

半开放演练 取 $(q, r, L, k) = (5, 2, 2, 4)$。先得 $D =$ ____，再算括号 $D^2 + 3 - (L+1)q =$ ____，最后 $\mu =$ _____。

最容易掉进去的坑

错法一： 把 $2(k-1)$ 写成 $2k-1$。括号先乘 2，正确是 $2k-2$。
错法二： 把 $D+1-r$ 化成 L。因为还多一个 $+1$，正确是 $L+1$。
错法三： 公式算出负余量却说猜想成立。余量定义为“清分母后的右边减左边”，负数正是反例。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练，并判断它是不是反例。

L1-2 模仿。取纤维 $R = C_5$、quotient 为三点路径 P_3，并让中间纤维的两座桥使用不同端口。此时 $(q, r, L, k) = (5, 2, 1, 3)$，且每份仍可选一个未作端口的 selector。求 $D, n, m, \rho, \tau_D, \mu$ 和 gap，并指出哪几句话保证这不是“只代参数而没有真实图”。

L2-1 迁移。在定理假设确实可实现时，取 $(q, r, L, k) = (10, 3, 2, 6)$，算 $n, m, D, \rho, \tau_D, \mu$ 和 gap，并用原始余量复核。

L2-2 迁移。不使用传递式的最后一行，对一般 q, r, L, k 从原始余量定义和 $\tau_D = (q-1)k$ 重新推导五行式；逐行标出代入依据。

L3 解释。不看推导，用“每份线性贡献 + 树比纤维少一条桥”解释尾项为什么是 -2 而不是 0。

核对答案与推理

半开放/L1-1： $D = 2 + 2 = 4$；括号为 $16 + 3 - 3 \cdot 5 = 4$；$\mu = 4 \cdot 4 - 2 = 14 > 0$，所以这组参数不产生反例。

L1-2： C_5 是五阶二正则直径二图；P_3 是树，中间纤维的两个不同端口各承受一座桥，所以实际最大负载为一；每份只用至多两个端口，仍有 unused selector。故定理条件真实实现。于是

$$D = 3, \quad n = 15, \quad m = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{2} + 2 = 17, \quad \rho = 3, \quad \tau_D = 12,$$

且 $\mu = 3(9 + 3 - 2 \cdot 5) - 2 = 4$，故 gap $= -4/10 = -2/5$；这组图满足猜想而非反例。

L2-1： $n = 60$；$m = 3 \cdot 10 \cdot 6/2 + 5 = 95$；$D = 5$；$\rho = 6$；$\tau_D = 54$。传递式给 $\mu = 6(25+3-30) - 2 = -14$，gap 为 $14/26 = 7/13$。原式复核：$5 \cdot 4 \cdot 60 + 190 - 26 \cdot 54 = 1200 + 190 - 1404 = -14$。

L2-2 六层答案。(1) 结果：$\mu = k((r+L)^2 + 3 - (L+1)q) - 2$。(2) 定义起点：$\mu = D(D-1)n + 2m - (D^2+1)\tau_D$，其中 $D = r + L$。(3) 合法性：依次代 $n = qk, 2m = rqk + 2(k-1), \tau_D = (q-1)k$，展开后用 $D - r = L$ 合并 qk 系数。(4) 易错：漏掉 $2(k-1) = 2k - 2$ 的尾项或括号前负号。(5) 复核：代 $(10, 3, 1, 5)$，传递式与原式都得 -7。(6) 评分：四参数代入 2 分、系数合并 2 分、尾项与复核各 1 分；最低表述必须保留每一行等号依据。

L3： 若每份都配一座桥，k 份会有 k 座桥并贡献 $2k$；树实际只有 $k-1$ 座，少一座，每座在 $2m$ 中值 2，所以在线性合并后留下 -2。

本卡过关门

闭卷从 deficit 恒等式开始写完整五行，任何括号不得跳步；随后用 $(q, r, L, k) = (10, 3, 1, 5)$ 走原始余量定义复核，应得到 $\mu = -7$。

24 小时后不同题： 取 Petersen 图作纤维、quotient 为四点路径 P_4，每个内部纤维的两座桥使用不同端口，因此 $(q, r, L, k) = (10, 3, 1, 4)$。先逐项确认直径、正则性、实际负载和 unused selector，再用传递式与原始余量式两路得到 $n = 40, m = 63, D = 4, \rho = 4, \tau_D = 36, \mu = -6$。少核一项结构假设，即使数值正确也不通过。

七天后红线复测（独立题面）：设 $(q,r,L,k)=(8,3,2,4)$ 且 loaded-tree 全部结构假设已逐项核验。计算 n,m,D,ρ,τ_D，并用传递式和原始余量式两路求 μ。**自校验键：**$(n,m,D,\rho,\tau_D)=(32,51,5,4,28)$；传递式给 $4(25+3-3\cdot 8)-2=14$；原式给 $5\cdot 4\cdot 32+102-26\cdot 28=14$，故不是反例。

1.9 卡 26：看懂斜率：什么时候越接越错

对应交互审查卡：26

前置知识：卡 25；预备篇“一次函数”“正负号”和“当且仅当”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能把 loaded-tree gap 看成关于纤维数 k 的直线，判断其斜率正、零或负；能准确表述：在保持 q,r,L 且能为任意大的 k 实现全部假设的这套机制内，gap 无界当且仅当一个明确系数为正。

先修自测（口答）

1. $\mu<0$ 时 gap 等于什么？
2. $ak+b$ 在 $a>0$ 时随 k 怎样变化？
3. “当且仅当”为什么需要两个方向？

逐题失败路由：第 1 题错回卡 08 与卡 25 的 margin–gap 关系；第 2 题错回 Z03“一次函数”；第 3 题错回 Z01“当且仅当的两向”。入口复测键：对 $3k+2$、2、$-k+2$ 分别说出斜率符号和是否无界增长。

先讲人话

每增加一座纤维，就像往账本再加一笔固定收支。若每份净增加的“违反”是正数，楼越盖越长，总违反越大；若净增加为零，只剩开头的一次性常数；若净增加为负，这个拼接法反而越接越不违反。

再讲精确

记实际最大度 $D=r+L$。由卡 25，

$$\tau_D(G)-\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(G)=\frac{-\mu(G)}{D^2+1}=\frac{k((L+1)q-D^2-3)+2}{D^2+1}.$$

令

$$b=(L+1)q-D^2-3.$$

分母 D^2+1 是固定正数。因此：

- $b>0$：gap 以正斜率增长，随 $k\to\infty$ 无界；更精确地，给定任意 $M>0$，只要选择

整数

$$k > \frac{M(D^2+1)-2}{b},$$

并同时让它不小于该构造允许的最小 k，就有 gap $> M$；

- $b = 0$：gap 恒为 $2/(D^2+1)$；
- $b < 0$：此时 $-b$ 是正数，该表达式每当 k 增加 1 都减少 $(-b)/(D^2+1)$；因此在允许的最小 k 处已经取得有限上界，之后只会下降，最终不再为正违反。

这里的“当且仅当”只针对**固定** q, r, L、**并且满足全部定理假设的构造能做到任意大** k 的 loaded-tree 序列，不是对所有图的必要条件。

新词与符号

把 k 看作横轴，gap 看作纵轴，式 $(bk+2)/(D^2+1)$ 是关于 k 的一次式。每当 k 增加 1，gap 固定改变 $b/(D^2+1)$；这个“每增加一步改变多少”叫斜率。斜率正就向上，等于零就水平，负就向下。符号 $k \to \infty$ 在这里不是说 k 真变成一个叫“无穷”的数，而是说让正整数 k 不断取更大的值，没有预先规定的上限。

为什么这一步是真的

不能只看余量公式中 k 前面的符号而忘记 gap 取负号。余量的系数是 $D^2+3-(L+1)q = -b$；想让余量越来越负、gap 越来越正，必须让 $b > 0$。

跟着做一遍

Petersen 参数 $q = 10, r = 3$：

- 若 $L = 1$，则 $D = 4$，$b = 2 \cdot 10 - 16 - 3 = 1 > 0$，gap 斜率为 $1/17$；
- 若 $L = 2$，则 $D = 5$，$b = 3 \cdot 10 - 25 - 3 = 2 > 0$，gap 斜率为 $2/26 = 1/13$。

作为纯代数演示，若某组固定参数给 $b = 0$，直线就是常数；但在把它称为图族前，还必须证明那组参数真的由满足全部假设的图和端口方案实现。

半开放演练 对 $(q, r, L) = (5, 2, 2)$，$D =$ ____，$b =$ ____，所以此机制的 gap 随 k _____。

最容易掉进去的坑

错法一： $b > 0$ 就自动存在任意大图。代数只告诉你“若构造存在会怎样”；还需树、端口、selector 和实际负载都可实现。

错法二： 把“loaded-tree 机制内的阈值”说成所有反例图的必要条件。别的结构可能用完全不同的方式产生违反。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 模仿。若 $b = 1$、分母为 26，写 gap 关于 k 的式子，并判断是否随 k 无界。

L2-1 迁移。三个代数模型的 b 分别为 $3, 0, -2$，分母固定为 17。写出 gap 的一般式并描述图像斜率；不要假装这些模型一定可实现。

L2-2 迁移。固定可实现的 $b > 0$ 和分母 $D^2 + 1$。给任意 $M > 0$，解出一个保证 gap 大于 M 的整数 k 条件，并写量词次序。

L3 解释。精确解释句子："$b > 0$ 是这套统一纤维–树机制产生无界 gap 的充要阈值，但不是任意图产生无界 gap 的充要条件。"

核对答案与推理

半开放/L1-1： $D = 4$，$b = 3 \cdot 5 - 16 - 3 = -4$，gap 为 $(-4k + 2)/17$，随 k 下降，最终为负。

L1-2： gap 为 $(k + 2)/26$；斜率 $1/26 > 0$，所以在家族可为任意大 k 实现时无界。

L2-1： 表达式分别为 $(3k + 2)/17$、$2/17$、$(-2k + 2)/17$；斜率依次正、零、负。

L2-2 六层答案。(1) 结果：需 $k > (M(D^2 + 1) - 2)/b$，再取满足家族边界的整数。(2) 定义起点：$\text{gap} = (bk + 2)/(D^2 + 1)$，分母正且固定。(3) 合法性：乘正分母不翻向，再减 2、除正数 b。(4) 易错：忘记 $b > 0$ 或把一个固定 k 要求为超过所有 M。(5) 复核：把所选 k 代回，分子严格大于 $M(D^2 + 1)$。(6) 评分：不等式变形 2 分、整数/边界 1 分、量词 2 分；最低表述为"对每个 M，存在依赖于 M 的有限 k"。

L3： 前半句固定了同一种定理输入和任意大 k 的可实现性，此时 gap 是一条直线，是否无界完全由 b 的符号决定；后半句承认图论世界还有别的图族，loaded-tree 的参数条件不能排除那些机制。

本卡过关门

闭卷从 μ 推出 gap，定义 b，分三种符号讨论，并口头说出"作用域"限制。随机给你 (q, r, L) 时，先算 D 再算 b；不得把代数可行误写成图族存在。

一天后新题 给三组 $(b, D) = (2, 4), (0, 5), (-1, 3)$，分别写 gap、判断斜率；只对第一组给 $M = 20$ 选一个足够大的整数 k，并写清量词。

1.10 卡 27：假设边界：换成含环连接图时要重审什么

对应交互审查卡：27

前置知识： 卡 19–26；预备篇"树""环""边数"和"重新证明而非类比"。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能把树推广为有 k 个纤维、e 条连接边的连通简单 quotient 图，正确改写 m 与余量公式；能列出直径、连通、负载、selector 和简单性必须重新核对的项目。

先修自测（口答）

1. 树的桥数为什么写成 $k-1$?
2. 余量中每加一条边改变多少?
3. 把三点路径闭成三角形，边数增加几?

逐题失败路由：第 1 题错回卡 20 “树有 $k-1$ 条边”；第 2 题错回卡 25 的余量定义（每加一条边，$2m$ 增加 2）；第 3 题错回 Z07 的树/环最小例。入口复测键：把四点路径加边闭成四边形，必须答“边数增加一，余量增加二”。

先讲人话

原定理像一份只适用于“树形公路网”的精确报价单。把公路网闭成环，并不表示城市会突然断开；但桥的数量、每个桥头的负载和账本常数都变了。正确做法不是把旧报价单上的“树”擦掉，而是逐栏重新清点。

新词与符号

quotient 图在本卡只是“把每整个纤维缩成一个大点”后看到的连接图。它有 k 个大点、e 条大点间的边；每条这样的边在原图中对应一条跨纤维连接边。注意：若 quotient 含环，这条新边删掉后未必使整图断开，因此未必是图论术语中的“桥”。

再讲精确

若 quotient Q 是连通简单图，有 k 个顶点、e 条边，每条 quotient 边仍只添加一条跨纤维连接边，并保留正则直径二纤维、实际最大负载 L 和每份 unused selector，那么

$$n = qk, \qquad m = \frac{rqk}{2} + e, \qquad \Delta = r + L, \qquad \rho = k, \qquad \tau_D = (q-1)k.$$

令 $D = r + L$，代入 deficit 形式得

$$\begin{aligned}\mu(G) &= (D^2+1)k - \big((D+1)qk - (rqk + 2e)\big)\\ &= \boxed{k\big(D^2 + 1 - (L+1)q\big) + 2e}.\end{aligned}$$

当 Q 是树时 $e = k-1$，上式才化回

$$k\big(D^2 + 3 - (L+1)q\big) - 2.$$

为什么这一步是真的

packing 上界仍由单纤维直径二给出。selector 下界也仍成立：不同纤维间至少过一条跨纤维连接边，两端 selector 各需一条内部边。树性不是这两步的核心；它的特殊作用是保证连通且 $e = k-1$，并让每条跨纤维连接边确实成为桥。然而 quotient 增加边会改变各纤维关联数，旧端口方案的实际 L 可能随之改变，必须重新计算后才能使用推广式。

跟着做一遍

三个纤维先按路径连接，$k = 3, e = 2$；再加一条首尾连接边闭成三角形，变成 $e = 3$。若能重新安排端口使实际 L 保持不变，顶点数不变，边数增加一，余量因此增加 2。可是端点纤维原来只有一个关联，闭环后各多一个关联，所以“L 保持不变”本身不能想当然，必

须查看端口是否分散以及是否仍有 unused selector。

半开放演练 固定 q, r, L, k，将 quotient 从树改成同阶连通图，多了 h 条边。若其他假设确实保持，则 m 增加 ____，μ 增加 ____。

最容易掉进去的坑

错法一： quotient 只要连通，桥数仍为 $k-1$。只有树才有这个等式。

错法二： 加环只改 m，绝不改 Δ。新的关联可能集中到旧端口，使实际 L 上升。

错法三： 纤维直径三也能照抄。卡 22 的 $\rho \le k$ 已经没有保证。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 模仿。把推广式代入树的 $e = k-1$，逐行化回卡 25 的余量公式。

L2-1 迁移。设 $Q = C_4$，所以 $k = e = 4$。取 $(q, r, L) = (10, 3, 1)$，假设端口方案确实使每点负载至多一且达到一、每份仍有 selector。算 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D, \mu$。

L2-2 迁移。设纤维 $R = C_5$、$Q = K_3$，让每份的两条关联边使用不同端口。此时 $(q, r, L, k, e) = (5, 2, 1, 3, 3)$，并可直接看出每份仍有 unused selector。求 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D, \mu$，再判断是否反例。

L3 审计。为“把树替换成一般连接图”的新命题列一张至少六项的重审清单。

核对答案与推理

半开放/L1-1： m 增加 h，因为多 h 条跨纤维连接边；$2m$ 因此增加 $2h$，其余参数假定不变时 μ 增加 $2h$。

L1-2： 代 $e = k-1$ 得 $k(D^2 + 1 - (L+1)q) + 2k - 2 = k(D^2 + 3 - (L+1)q) - 2$。

L2-1： $n = 40$；$m = 3 \cdot 10 \cdot 4/2 + 4 = 64$；$\Delta = 4$；$\rho = 4$；$\tau_D = 36$。推广余量为

$$4(16 + 1 - 2 \cdot 10) + 2 \cdot 4 = 4(-3) + 8 = -4.$$

用原式可复核：$4 \cdot 3 \cdot 40 + 128 - 17 \cdot 36 = -4$。

L2-2 六层答案。(1) 结果：$n = 15, m = 18, \Delta = 3, \rho = 3, \tau_D = 12, \mu = 6$，不是反例。(2) 定义起点：$k = e = 3, D = r + L = 3$ 及推广余量式。(3) 合法性：C_5 二正则且直径二；内部边为 $rqk/2 = 15$，再加三条跨纤维边；每份两个不同端口各只增加一次度数，且还剩 unused selector。(4) 易错：把含环 quotient 仍写成 $e = k - 1 = 2$，或只代参数而不核验纤维直径。(5) 复核：推广式给 $3(10-10) + 6 = 6$；原式给 $3 \cdot 2 \cdot 15 + 36 - 10 \cdot 12 = 6$。(6) 评分：结构合法性 2 分、六参数 3 分、余量与反例判断 1 分、原式复核 1 分；最低表述必须说明正 margin 表示猜想仍有余量。

L3： 至少检查：quotient 是否连通；是否简单、每边只加一条跨纤维连接边；真实连接边数 e；各纤维是否仍是 r-正则、直径至多二；新端口负载表和实际 L；每份是否仍有 unused selector；由此重证 ρ 上下界；最后重算 $n, m, \Delta, \tau_D, \mu$。

本卡过关门

闭卷写出一般 e 条 quotient 边的余量公式，并代 $e = k - 1$ 化回树公式。再口述三件不能类比跳过的事：实际负载、unused selector、packing 上下界。能解释“加一条跨纤维连接边为何余量加 2”才通过。

一天后新题 纤维取 C_5，quotient 取五边形 C_5；每份的两条关联边使用不同端口。于是

$$(q, r, L, k, e) = (5, 2, 1, 5, 5).$$

闭卷先验证实际负载、unused selector 和纤维直径，再算出

$$n = 25, \quad m = 30, \quad \Delta = 3, \quad \rho = 5, \quad \tau_D = 20, \quad \mu = 10.$$

最后解释为何它不是反例，以及为什么“参数能代入”仍不能替代三项结构检查。

24 小时闭卷作答区（先查结构，再做计算）

结构合法性：实际负载、unused selector、纤维直径

六参数与余量复算

结论：是否反例，以及为什么不能只代参数

第二章　第四篇：每一个固定最大度都能无限违反

本篇把 loaded-tree 机器用于真正的临界情形。最大度四和五使用 Petersen 图作纤维；最大度至少六使用前篇的 $H_{t,r}$ 反例积木。最后把三段拼成一个量词完整的结论：每个固定整数 $\Delta \geq 4$，总加性违反都没有有限上限。

2.1　卡 28：Petersen 图：参数证明与学术归属

对应交互审查卡：28

前置知识： 卡 19；预备篇“二元素子集”“正则图”“距离”和“对象归属”。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从一个可核查的定义构造 Petersen 图，独立证明它有 10 个顶点、每点度数 3、直径 2；能说明 Petersen 图和相关拼接操作来自前人，而本文候选新贡献是把它们用于精确计算 Henning–Yeo 余量及其后果。

先修自测（口答）

1. 从五个物品中不计顺序选两个，共有多少种？
2. r-正则是什么意思？
3. 证明直径至多二，需要检查哪些点对？

第一题可直接列出 $12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45$，共 10 个，不要求先会组合公式。逐题失败路由：第 1 题错回 Z02，按给出的十项逐个数；第 2 题错回卡 01 的正则定义；第 3 题错回卡 13 与 Z05“直径至多二要覆盖所有非邻接点对”。入口复测键：任取顶点 12，列出与它相邻的三个二元子集。

先讲人话

准备写有数字 $1, 2, 3, 4, 5$ 的五张卡。Petersen 图的每个顶点是一组“两张卡”，例如 $\{1, 2\}$。两组完全没有共同数字时，就在它们之间连边。这样不用依赖一幅可能画歪的五角星，任何边都能按规则核查。

新词与符号

本卡把顶点 $\{1,2\}$ 简写成 12。两个顶点 ab, cd 相邻，当且仅当集合 $\{a,b\}$ 与 $\{c,d\}$ 没有共同元素，即交集为空。

再讲精确

Petersen 图 P 的顶点是 $\{1,2,3,4,5\}$ 的所有二元素子集；两个顶点相邻当且仅当它们互不相交。

阶： 按较小数字依次为 $1,2,3,4$，可把所有二元素子集不重不漏地列成

$$12, 13, 14, 15; \quad 23, 24, 25; \quad 34, 35; \quad 45.$$

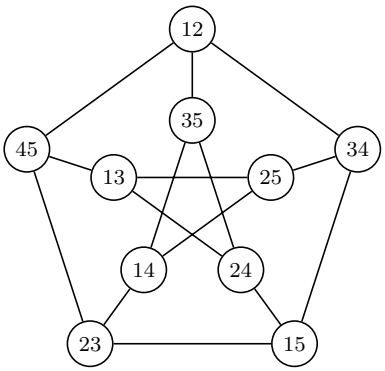
共有 10 个。这个数也记作 $\binom{5}{2}$，故 $q = 10$。

度数： 固定顶点 12 后，剩余数字为 $3,4,5$。与 12 不相交的二元素子集是 $34, 35, 45$，恰有三个。任意顶点同理，故 P 是 3-正则图，即 $r = 3$。

直径： 两个不同顶点若不相交，已经相邻，距离一；若相交，它们的并集恰有三个数字，余下两个数字组成一个顶点，这个顶点与二者都不相交，所以给出长度二的共同邻点路径。因此任意两点距离至多二。图中确有不相邻点（如 $12, 13$），故直径恰为二。

新词与符号

$\binom{5}{2}$ 读作“五选二”，表示从五个不同元素中不计顺序选两个的种数。本卡不要求背公式：直接列出 $12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45$，已经得到 10 种并证明没有遗漏。



上图是一种熟悉画法；真正定义是“不相交才连边”。核对图时应查标签交集，而不是相信线条位置。

下面的邻接表把十个点全部核对一遍；每行右侧恰有三个邻点：

顶点	邻点	顶点	邻点
12	$34, 35, 45$	13	$24, 25, 45$
14	$23, 25, 35$	15	$23, 24, 34$
23	$14, 15, 45$	24	$13, 15, 35$
25	$13, 14, 34$	34	$12, 15, 25$
35	$12, 14, 24$	45	$12, 13, 23$

最短路检查也只有两类：两个二元素集不相交时距离一；相交时用剩下的两个数字作共同邻点，距离二。这两类覆盖任意两个不同顶点。

为什么这一步是真的

若两个不同二元素子集相交，它们只能共享一个数字，所以并集大小为三；五个数字中恰剩两个。剩余二元素集与前两个集合都没有共同数字，因此确实是共同邻点。这一步同时证明连通和距离至多二。

跟着做一遍

顶点 12 的三个邻点是 $34, 35, 45$。顶点 13 与 12 不相邻，因为共享数字 1；二者并集为 $\{1, 2, 3\}$，剩余顶点 45 同时邻接 $12, 13$，所以 $12 - 45 - 13$ 是两步路。

半开放演练 顶点 24 的邻点为 _____。顶点 $24, 25$ 不相邻，其共同邻点可取 _____。

学术边界

Petersen 图是经典图，不是本文发明。沿桥拼接低度顶点、同根 rooted product（带根乘积，一种把多份带指定根的图按外部图连接的已有操作）、相关 packing 公式，以及同根 Petersen 路径也有先前工作。本文可以主张并需同行核验的，是这些已知对象对 Henning–Yeo 余量的精确作用，以及由此得到的固定度无界结论；不能把基础图或操作据为原创。

最容易掉进去的坑

错法一：看图像每点三条线，所以三正则。正式证明应从邻接定义数出三个邻点，避免绘图错误。

错法二：“本文首次用 Petersen 图。”过宽且无证据。必须把“经典对象”“已知操作”“本文新应用”分层表述。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练，并列出顶点 35 的三个邻点。

L1-2 基础核对。不看邻接表，只按“不相交才连边”的定义，列出顶点 12 的三个邻点，并逐个说明为什么合法。

L2-1 迁移。对任意两个相交的顶点 A, B，不用具体数字，证明补集 $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus (A \cup B)$ 是它们唯一的共同邻点。

L2-2 完整证明。从二元素子集定义出发，证明 Petersen 图任意两点距离至多二，并再给出一个距离恰为二的点对，从而推出直径恰为二。

L3 归属。用三句话分别写：Petersen 图是什么；哪些拼接已有先例；本文在本问题中计算了什么。不得出现绝对的“首次”字样。

核对答案与推理

半开放/L1：24 的剩余数字是 $1, 3, 5$，邻点为 $13, 15, 35$。$24, 25$ 的并集是 $\{2, 4, 5\}$，剩余 13 是共同邻点。35 的邻点为 $12, 14, 24$。

L1-2： 12 的邻点只能从剩余数字 $3, 4, 5$ 中选两个，所以恰为 $34, 35, 45$；它们都与 12 交集为空，故三条边合法。

L2： A, B 各有两元素并共享一个，所以并集有三元素，补集正好两元素，构成顶点 C；C 与 A, B 均不相交。任何共同邻点都必须避开 $A \cup B$ 的三个元素，只能使用剩下两个，因此就是 C。

L3 示例： Petersen 图是经典的十阶三正则直径二图。桥拼接、rooted product 及相关 Petersen 路径已有文献先例。本稿使用这些已知结构，精确计算其 Henning–Yeo 余量并推出固定最大度四、五的无界加性违反；新颖性仍由人类审稿确认。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** 任意两点距离至多二，且 $12, 13$ 距离恰为二，所以直径为二。
2. **定义起点：** 顶点是五元集合的二元素子集；两顶点交集为空当且仅当相邻。
3. **合法性：** 若两点不相交，它们距离一；若相交，它们的并集有三个元素，余下两个元素组成的顶点与二者都不相交，给出两步路。
4. **易错点：** “至多二” 还不是 “恰为二”；必须另找不相邻的两点，如共享元素 1 的 $12, 13$。
5. **独立复核：** 邻接表中 12 与 13 没有直接边，但二者都邻接 45，所以 $12 - 45 - 13$ 长度为二。
6. **评分最低表述：** 必须同时写清 “不相交一跳、相交两跳” 和 “存在不相邻点”；只画五角星不给定义论证不得分。

本卡过关门

闭卷用二元素子集定义重建 Petersen 图，证明 $q = 10, r = 3, \mathrm{diam} = 2$；再口述 “对象–操作–新应用” 三层归属。只会画五角星但不能证明参数，不算通过。

一天后换题：不用本卡出现过的点对，判断 14 与 15 的距离，并写出一个共同邻点；再解释为什么这个例子不能单独证明所有点对距离至多二。

2.2 卡 29：红线卡：最大度四的不同端口与 $k \geq 2$ 边界

对应交互审查卡：29（红线卡）

前置知识： 卡 18、21、28；必须会分清树顶点度、端口负载与最终图最大度。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能构造 $P_{4,k}$：把 k 份 Petersen 图沿路径连接，内部纤维的两次关联使用不同端口；能证明实际 $L = 1$、$\Delta = 4$，并解释为什么参数范围从 $k \geq 2$ 开始而不是 $k \geq 1$。

先修自测（口答）

1. Petersen 图原度数 r 是多少？
2. 路径的内部顶点有几次关联？端点有几次？
3. 若两次关联使用不同端口，每个端口负载是多少？

逐题失败路由：第 1 题错回卡 28；第 2 题错回卡 18 的路径 quotient；第 3 题错回卡 18 的负载定义。入口复测键：画四点路径，在两个内部纤维各标两个不同端口并写每个负载为一。

先讲人话

把 Petersen 小城排成一列。队伍中间的城有左桥和右桥，但故意让两座桥落在不同房间；所以任何房间最多只多一条桥。只要至少有两座城，就真的有桥头负载一，原来三条路的桥头现在有四条路。

再讲精确

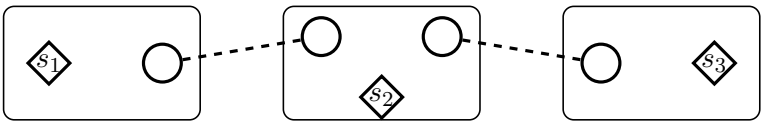
对整数 $k \geq 2$，令 quotient 树为路径 $1-2-\cdots-k$。每个端纤维只有一个关联，任选一个端口；每个内部纤维有两个关联，并把它们分配给**不同**顶点。于是所有点负载不超过 1。因为 $k \geq 2$，至少有一条桥，其端点负载等于 1，所以实际

$$L = 1, \qquad \Delta = r + L = 3 + 1 = 4.$$

每个纤维最多使用两个端口，而 Petersen 图有十个顶点，所以总能另选一个负载零的 unused selector。

k	是否有桥	最高负载 L	实际 Δ	边界理由
1	否	0	3	只是原 Petersen 图，不属 $P_{4,k}$ 家族
2	是	1	4	两端各承担一桥，已经有达到点
≥ 3	是	1	4	内部两桥分给不同端口，每点仍至多一桥

内部纤维：两桥用不同端口



读图时只看形状与线型：圆点是接桥端口，菱形是未使用选择点，粗虚线是新增的桥。中间纤维把两座桥分给不同端口，所以每个端口只增加一度。

为什么这一步是真的

$k = 1$ 时 quotient 路径没有边，也就没有桥。所有负载都是零，实际 $L = 0$，最终图只是原 Petersen 图，最大度是三。把 $k = 1$ 硬代进 $L = 1$ 的公式，会把“三正则图”错误归入最大度四。

跟着做一遍

取 $k=3$。第一份用端口 12；第二份左桥用 12、右桥用 13；第三份用 12。四个被使用的端口各负载一，其他点为零。第二份可选 14 作 selector。所有原度数三的端口升到四，未用点仍为三，故实际最大度四。

半开放演练 对 $k=2$，两个纤维各有 ____ 次关联，实际 $L=$ ____，最大度为 ____。是否需要内部纤维才能达到四？_____

最容易掉进去的坑

错法一： 内部纤维树度为二，所以 $L=2$。若两次关联使用不同端口，每个端口各负载一，L 仍是一。

错法二： $k=1$ 也可叫 $P_{4,1}$。名字不能改变实际最大度；它只有三。

错法三： selector 随便选端口之一。selector 必须负载零；这里有至少八个未用点可选。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 画表。对 $k=3$，逐份写出关联数，并给出一个不同端口方案；列出所有非零负载。

L2-1 迁移。对 $k=4$，给四份 Petersen 图编号，写出每份关联数，设计不同端口方案并列出所有非零负载。

L2-2 一般证明。对任意 $k\geq 2$，证明不同端口方案的实际最高负载恰为 1、实际最大度恰为 4，并证明每份都能选到 unused selector。

L3 找错。有人让第三个内部纤维两桥共用同一点，却仍声称整个家族最大度四。给出该点的新度数并纠正家族类别。

核对答案与推理

半开放/L1： 每份各一次关联，两个桥端点负载一，故 $L=1,\Delta=4$；不需要内部纤维，只要有一座桥就有达到点。

L1-2： 关联数为 $1,2,1$。例如第一份用 12，第二份左桥用 12、右桥用 13，第三份用 12；这些端口分属不同副本，四个非零负载全为一。

L2： 关联数依次 $1,2,2,1$。例如每个端纤维用端口 12，内部纤维分别用 $12,13$ 两个不同端口。所有列出的六个端口（分属不同副本）负载均为一，其他点为零，所以 $L=1$。

L3： 共用点负载二，新度数为 $3+2=5$，全图实际最大度至少五；若没有更高负载，则它属于最大度五方案，不能用 $\Delta=4$ 的分母 17。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** 任意 $k\geq 2$ 都有 $L=1,\Delta=4$，且每份存在负载零的 selector。
2. **定义起点：** 负载是同一端口承担的桥数；内部纤维的两个关联被分给不同端口。
3. **合法性：** 端纤维每点至多承担一桥，内部纤维两个端口各承担一桥，所以所有负载至多一；又因 $k\geq 2$ 至少有一桥，其端点负载为一，故最高负载恰为一。

4. **易错点：**树中内部点度数为二，不等于单个端口负载二；二次关联已被拆给两个点。
5. **独立复核：**Petersen 图原度三，负载一的端口新度四；每份最多用两个端口，十个顶点中至少八个负载零，可选 selector。
6. **评分最低表述：**必须同时给“所有负载不超过一”和“有负载达到一”；只写 $L \leq 1$ 或只引用家族名字不得分。

本卡过关门

闭卷分别画 $k = 1, 2, 3$ 的端口图并写实际 L, Δ。必须说清 $k = 1$ 为什么不在家族中、$k = 2$ 为什么已经足够。24 小时后用 $k = 5$ 重画一个负载表，所有内部纤维必须用不同端口。**七天后红线复测（独立题面）：**画 $P_{4,4}$ 的四块端口表。内部块的两次关联必须落在不同根点；求实际 L, Δ。再把其中一个内部块改成同一点承受两桥，判断它是否仍属 $P_{4,4}$。**自校验键：**正确方案每个被用端口负载一，故实际 $L = 1, \Delta = 3 + 1 = 4$；改成共同端口后该点负载二、实际最大度五，已离开最大度四家族。

2.3 卡 30：$P_{4,k}$ 的全部参数与无界斜率

对应交互审查卡：30

前置知识：卡 24–26、29；需要会代 loaded-tree 参数并解释负余量。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从 $(q, r, L) = (10, 3, 1)$ 推出 $P_{4,k}$ 的 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D, \mu$ 和 gap；能换任意 $k \geq 2$ 重算，并说明为什么固定最大度四的总违反随 k 无界。

先修自测（口答）

1. Petersen 图的 (q, r) 是什么？
2. 不同端口方案的实际 L 是什么？
3. loaded-tree 余量公式是什么？

逐题失败路由：第 1 题错回卡 28；第 2 题错回卡 29；第 3 题错回卡 25。入口复测键：不用看公式，先写 $(q, r, L) = (10, 3, 1)$，再口述余量式中每个字母来源。

再讲精确

对每个 $k \geq 2$，代 $(q, r, L) = (10, 3, 1)$：

$$\begin{aligned} n &= qk = 10k, \\ m &= \frac{rqk}{2} + k - 1 = 15k + k - 1 = 16k - 1, \\ \Delta &= r + L = 4, \\ \rho &= k, \qquad \tau_D = (q-1)k = 9k, \\ \mu &= k(4^2 + 3 - 2 \cdot 10) - 2 = -k - 2. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{\tau_D(P_{4,k}) - \mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(P_{4,k}) = \frac{k+2}{17}}.$$

分母 $17 = 4^2 + 1$ 来自实际最大度四。

先讲人话

每多接一座 Petersen 小城，gap 就多 1/17；开头还带一个 2/17 的常数。最大度一直固定为四，但城数可以任意增加，所以总违反没有天花板。

为什么这一步是真的

“无界”不是说某一张有限图的数值等于无穷，而是：给定任何目标 M，总能选足够大的整数 k 使 $(k+2)/17 > M$。例如选 $k > 17M - 2$，并同时保证 $k \geq 2$。

跟着做一遍

取 $k = 7$：

$$(n, m, \Delta, \rho, \tau_D) = (70, 111, 4, 7, 63).$$

余量 $\mu = -7 - 2 = -9$，gap 为 9/17。原式复核：

$$4 \cdot 3 \cdot 70 + 2 \cdot 111 - 17 \cdot 63 = -9.$$

实际最大度四由端口负载表证明，不是因为公式写了 4。

半开放演练 取 $k = 5$：$n =$ _____，$m =$ _____，$\rho =$ ____，$\tau_D =$ _____，$\mu =$ ____，gap = _____。

最容易掉进去的坑

错法一： gap 是 $(-k-2)/17$。负余量对应正违反，所以 gap 为 $-\mu/17 = (k+2)/17$。
错法二： 顶点数增大，所以最大度也增大。最大度看单个顶点的邻边数；这里每个端口始终只加一条桥。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 数值练习。对 $k=7$ 计算 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D, \mu$ 与 gap。

L2-1 迁移。对 $k=9$ 计算全部六个参数与 gap，并用原始余量式复核。

L2-2 双路线推导。不背最终答案，先用 loaded-tree 公式推出 $\mu=-k-2$，再用 $n=10k, m=16k-1, \rho=k$ 代入 deficit 形式独立复核。

L3 解释。给定 $M=100$，写出一个具体足够大的 k，保证 $P_{4,k}$ 的 gap 大于 100；说明这句话中的量词顺序。

核对答案与推理

半开放/L1： $n=50, m=79, \rho=5, \tau_D=45, \mu=-7$，gap $=7/17$；$\Delta=4$ 不变。

L1-2： $n=70, m=111, \Delta=4, \rho=7, \tau_D=63, \mu=-9$，gap $=9/17$。

L2： $n=90, m=143, \Delta=4, \rho=9, \tau_D=81, \mu=-11$，gap $=11/17$。复核：$4\cdot 3\cdot 90+286-17\cdot 81=1080+286-1377=-11$。

L3： 需要 $(k+2)/17>100$，即 $k>1698$；取 $k=1699$。量词是“对任意给定的 M，存在一个依赖于 M 的有限整数 k”，不是存在一个固定 k 同时超过所有 M。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** $\mu(P_{4,k})=-k-2$，所以 gap 为 $(k+2)/17$。
2. **定义起点：** loaded-tree 余量为 $k((r+L)^2+3-(L+1)q)-2$，本家族 $(q,r,L)=(10,3,1)$。
3. **合法性：** 代入得 $k(16+3-20)-2=-k-2$；卡 29 已证明实际最大度确为四，因此分母可用 17。
4. **易错点：** 负余量对应正 gap；不能把 gap 写成 $(-k-2)/17$。
5. **独立复核：** deficit 形式给 $17k-(5\cdot 10k-2(16k-1))=17k-(18k+2)=-k-2$。
6. **评分最低表述：** 必须写出所代的 (q,r,L)、实际最大度依据及一条独立复核；只报结论不给过程不得分。

本卡过关门

闭卷从 $(10,3,1)$ 重建全部公式，不能直接背最终五元组。随机给 $k=6$ 时，应得到 $(n,m,\Delta,\rho,\tau_D)=(60,95,4,6,54)$、$\mu=-8$、gap $8/17$，并能证明随 k 无界。

一天后换题：取 $k=11$，从结构重新算出全部参数与 gap，并用原始余量式复核；不得把本卡 $k=6,7,9$ 的答案改数字冒充推导。

2.4 卡 31：红线卡：最大度五的同根方案与 $k \geq 3$ 边界

对应交互审查卡：31（红线卡）

前置知识： 卡 18、21、28–30；必须理解“同一根”改变的是负载而非桥数。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能构造同根 Petersen 路径：一份纤维的所有关联都使用同一根；能证明 $k \geq 3$ 时实际 $L = 2, \Delta = 5$，并解释 $k = 2$ 为什么仍只有最大度四。

先修自测（口答）

1. 一条 k 点路径何时有内部顶点？
2. 内部顶点有几条与它相接的树边（也就是有几个关联）？
3. 两个关联若使用同一点，该点负载多少？

逐题失败路由：第 1 题错回 Z07 的路径端点/内部点；第 2 题错回卡 29 的 quotient 关联；第 3 题错回卡 18 的同点负载。入口复测键：分别画 $k = 2$ 与 $k = 3$，圈出最大负载一和二。

先讲人话

这次中间小城的左桥和右桥都落在同一间“根房间”。这间房原有三条路，又加两座桥，变成五条路。但只有队伍中真的出现中间小城时，负载二才会出现；两座城之间只有一座桥，每个根只增加一条路。

再讲精确

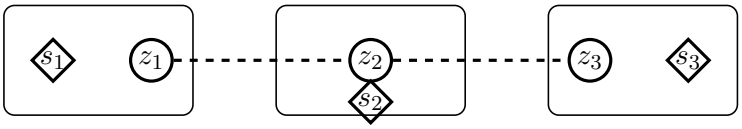
对路径上的每个纤维，预先指定一个根 z_i，把该纤维的所有树边关联都分配给 z_i。

- 当 $k \geq 3$ 时，路径有内部顶点；其根同时承担左右两座桥，负载为 2。端纤维根负载为 1，其他点为 0。因此实际 $L = 2$，$\Delta = 3 + 2 = 5$。
- 当 $k = 2$ 时，路径只有两个端点，没有内部顶点；两个根各负载 1，所以实际 $L = 1$、$\Delta = 4$。
- 当 $k = 1$ 时没有桥，$L = 0, \Delta = 3$。

在 $k \geq 3$ 情形，每份除根外还有九个点，任取一个即可作 unused selector。

k	路径中的纤维类型	根负载表	实际最大度
1	单点	0	3
2	两个端点	$1, 1$	4
3	端点、内部点、端点	$1, 2, 1$	5
4	两端点与两个内部点	$1, 2, 2, 1$	5

z_2 同时接两桥，负载 2



这里仍用圆点表示端口、菱形表示未使用选择点、粗虚线表示桥；不同之处是中间纤维的两座桥都接在同一个端口 z_2 上，因此该点负载为二。

为什么这一步是真的

“同根”只说每份内部如何选择端口，不会凭空增加树边。实际负载等于该纤维在 quotient 路径中的度数：端点为一、内部点为二。k 的边界正是由“是否存在内部点”决定。

跟着做一遍

$k=3$ 时负载依次为 $1,2,1$（每个数指各纤维根的负载），因此中间根新度数五，实际最大度五。$k=2$ 时负载只有 $1,1$，所有新度数至多四；把 $k=2$ 代进最大度五公式会使用错误分母 26。

半开放演练 对 $k=4$，四个根的负载依次为 _____，实际 $L=$ ____，$\Delta=$ ____。

最容易掉进去的坑

错法一： 只要规定“同根”，L 就自动等于二。$k=2$ 没有内部纤维，任何根都只接一桥。

错法二： 根不能再有 selector。selector 不是“另一种根”，只需另选任何负载零的非根顶点。

错法三： 同根操作是本文原创。它属于已知 rooted-product/path-union 类构造；这里 path-union 指“把若干图沿一条路径的次序并接”。本文的新应用边界见卡 28。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 负载表。对 $k=5$ 写出五个根的负载序列，并标出哪些根达到最大度五。

L2-1 迁移。分别画 $k=2,3,6$ 的 quotient 路径，写每个根的负载和实际最大度。

L2-2 边界证明。证明同根方案的实际 $L=2$ 当且仅当 $k\geq 3$；同时分别说明 $k=1,2$ 的实际 L 与最大度。

L3 找错。“$k=2$ 的同根 Petersen 路径满足最大度五，余量可直接用 $L=2$。”逐句纠正，并给出正确实际最大度。

核对答案与推理

半开放/L1： 负载依次 $1,2,2,1$，故 $L=2,\Delta=5$。

L1-2： 根负载序列为 $1,2,2,2,1$；中间三份的根原度三、各加两桥，新度五并达到最大度。

L2： $k=2$ 为 $1,1$，最大度四；$k=3$ 为 $1,2,1$，最大度五；$k=6$ 为 $1,2,2,2,2,1$，最大度五。

L3： $k=2$ 虽然每份把所有关联放在同一根，但每份只有一个关联，所以根负载一；实际 $L=1$，最大度 $3+1=4$。因此必须使用 $\Delta=4$ 的余量，而不是 $L=2,\Delta=5$ 的公式。

L2-2 六层答案：

1. **结果：**$k \geq 3$ 时且仅此时 $L = 2, \Delta = 5$；$k = 2$ 时 $L = 1, \Delta = 4$；$k = 1$ 时 $L = 0, \Delta = 3$。
2. **定义起点：**同根方案中，一个根的负载等于其对应路径顶点的度数。
3. **合法性：**路径只有在 $k \geq 3$ 时才有内部顶点，而内部顶点度二；端点度一，单点路径度零。
4. **易错点：**“规定同根”不会凭空制造第二座桥；$k = 2$ 两份都只是端纤维。
5. **独立复核：**直接列负载：$k = 1$ 为 0，$k = 2$ 为 $1, 1$，$k = 3$ 为 $1, 2, 1$；加上原度三即得三种最大度。
6. **评分最低表述：**必须出现“当且仅当”两方向及三个边界；只说 $k \geq 3$ 有内部点而不排除 $k < 3$ 不完整。

本卡过关门

闭卷画 $k = 2$ 与 $k = 3$ 的同根负载图，并用“路径内部顶点存在性”解释边界。24 小时后随机问 $k = 1, 4, 10$，必须先写实际负载再说最大度，禁止从家族名字猜答案。
七天后红线复测（独立题面）：对同根方案分别处理 $k = 2$ 与 $k = 5$。写各块根的负载、实际 L 和实际最大度，并解释为什么合法家族从 $k = 3$ 开始。**自校验键：**$k = 2$ 只有两个端块，根负载均一，故 $L = 1, \Delta = 4$；$k = 5$ 的三个内部块根负载二、端块根负载一，故 $L = 2, \Delta = 5$。只有 $k \geq 3$ 才存在内部块达到二。

2.5 卡 32：$P_{5,k}$ 的全部参数：为什么分母变成 26

对应交互审查卡：32

前置知识：卡 24–26、31；需先确认 $k \geq 3$ 和实际 $L = 2$。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能从 $(q, r, L) = (10, 3, 2)$ 推出 $P_{5,k}$ 的全部参数和 gap；能解释为什么 n, m, ρ, τ_D 与最大度四家族相同，而 Δ, μ 和分母不同。

先修自测（口答）

1. 同根 Petersen 路径从哪个 k 起实际最大度五？
2. 改变端口是否会改变桥的条数？
3. 余量与 gap 的分母使用标称度还是实际最大度？

逐题失败路由：第 1 题错回卡 31；第 2 题错回卡 20“端口只改落点、不改桥数”；第 3 题错回卡 08 与卡 21“必须用实际最大度”。入口复测键：对 $k = 2, 3$ 各写实际最大度，再说明为何只

有后者能代 $D=5$。

再讲精确

对每个 $k \geq 3$，使用 $(q,r,L)=(10,3,2)$：

$$\begin{aligned} n &= 10k, \\ m &= \frac{3\cdot 10\cdot k}{2} + k - 1 = 16k-1, \\ \Delta &= 3+2=5, \\ \rho &= k, \qquad \tau_D = 9k, \\ \mu &= k(5^2+3-3\cdot 10)-2 = -2k-2. \end{aligned}$$

所以

$$\tau_D(P_{5,k}) - \mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(P_{5,k}) = \frac{2k+2}{5^2+1} = \boxed{\frac{k+1}{13}}.$$

先讲人话

桥仍然只有 $k-1$ 座，所以房间数和道路总数没有变；selector 的论证也没变。改变的是两座桥在中间城里挤到同一个根，使最繁忙房间从四条路升到五条路。Henning–Yeo 公式把最大度同时放在分子和分母，因此必须全部重算，不能只把上一卡的 4 改成标题里的 5。

为什么这一步是真的

分母 Δ^2+1 现在是 $5^2+1=26$。最后约分成 $(k+1)/13$ 是因为分子 $2k+2=2(k+1)$ 与 26 同除以 2。若沿用 17，就等于把一张实际最大度五的图塞进最大度四公式，比较的是另一个命题。

跟着做一遍

取 $k=6$：

$$(n,m,\Delta,\rho,\tau_D)=(60,95,5,6,54).$$

余量为 $-2\cdot 6-2=-14$，gap 为 $14/26=7/13$。原定义复核：

$$5\cdot 4\cdot 60 + 2\cdot 95 - 26\cdot 54 = 1200+190-1404=-14.$$

半开放演练 取 $k=4$：$n=$ _____，$m=$ _____，$\tau_D=$ _____，$\mu=$ _____，gap $=$ _____。

最容易掉进去的坑

错法一： 最大度从四变五，所以边数也增加。两种家族桥数相同，只是桥端点是否重复；$m=16k-1$ 不变。

错法二： 把 $k=2$ 代入得到 gap $3/13$。$k=2$ 时实际 $L=1,\Delta=4$，不满足本卡定理假设。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 数值练习。对 $k=5$ 计算 $n, m, \Delta, \rho, \tau_D, \mu$ 与 gap。

L2-1 迁移。对 $k=8$ 计算全部参数与 gap，并用 deficit 形式和原始余量形式各复核一次。

L2-2 双路线推导。从 loaded-tree 公式推出 $\mu=-2k-2$，再用 $n=10k, m=16k-1, \rho=k$ 的 deficit 形式独立复核，并说明为什么分母必须是 26。

L3 比较。在相同 $k \geq 3$ 下，比较 $P_{4,k}$ 与 $P_{5,k}$ 的 $n, m, \rho, \tau_D, \Delta$ 和 gap；逐项说出相同或不同的结构原因。

核对答案与推理

半开放/L1： $n=40, m=63, \tau_D=36, \mu=-10$，gap $=10/26=5/13$；另有 $\Delta=5, \rho=4$。

L1-2： $n=50, m=79, \Delta=5, \rho=5, \tau_D=45, \mu=-12$，gap $=12/26=6/13$。

L2： $n=80, m=127, \Delta=5, \rho=8, \tau_D=72, \mu=-18$，gap $=9/13$。deficit 复核：$26 \cdot 8-(6 \cdot 80-254)=208-226=-18$；原式复核：$5 \cdot 4 \cdot 80+254-26 \cdot 72=1600+254-1872=-18$。

L3： 两者纤维数、内部图和桥数相同，所以 n, m 相同；直径二和 unused selector 仍给 $\rho=k, \tau_D=9k$。不同端口使 $L=1, \Delta=4$；同根使 $L=2, \Delta=5$，因此余量和 gap 的分母、斜率都不同。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** $\mu(P_{5,k})=-2k-2$，gap 为 $(k+1)/13$。
2. **定义起点：** loaded-tree 公式代 $(q, r, L)=(10,3,2)$；卡 31 保证 $k \geq 3$ 时实际 $\Delta=r+L=5$。
3. **合法性：** 代入得 $k(25+3-30)-2=-2k-2$，所以 gap 为 $(2k+2)/(5^2+1)$。
4. **易错点：** 端口位置改变不改变 n, m, ρ，却改变实际最大度；不能沿用最大度四的分母 17。
5. **独立复核：** deficit 形式给 $26k-(6 \cdot 10k-2(16k-1))=26k-(28k+2)=-2k-2$。
6. **评分最低表述：** 必须说明 $k \geq 3$、实际最大度五和分母 26；缺任一项，即使代数数值偶然对也不通过。

本卡过关门

闭卷从 $(10,3,2)$ 推出所有参数，随机取 $k=7$ 应得到 $n=70, m=111, \Delta=5, \rho=7, \tau_D=63, \mu=-16$、gap $8/13$。必须主动声明 $k \geq 3$。若忘记实际最大度或分母 26，本卡不通过。一天后换题：取 $k=9$，重建全部参数、余量和 gap，并分别用 deficit 与原始余量式复核；先声明为什么这个 k 在合法范围内。

2.6 卡 33：红线卡：高次数 H-链的实际最大度

对应交互审查卡：33（红线卡）

前置知识： 卡 10–16、18、21；需要记得 $H_{t,r}$ 的顶点类型和度数。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能对每个 $\Delta \geq 6$ 构造 $C_{\Delta,k}$：串联 k 份 $H_{3,\Delta-3}$；能逐类检查桥端点、d_j、a, b 等点的新度数，并证明实际最大度仍恰为 Δ，包括 $k = 1, 2$ 的边界。

先修自测（口答）

1. 在 $H_{t,r}$ 中，a, b 的度数是多少?
2. c_1 在单块中的度数是多少?
3. 一条块链的端块和内部块分别给 c_1 增加几座桥?

答案应为 $t + r$、2、端块至多一而内部块两座。*逐题失败路由*：第 1、2 题错回卡 12 的度数表；第 3 题错回卡 29 的路径端块/内部块。入口复测键：取 $\Delta = 6$，必须比较 a, b 的六度与桥接 c_1 的至多四度。

先讲人话

高次数时不再用 Petersen 小城，而用已经会制造负余量的 H 积木。桥专门接在原来只有两条路的低度点 c_1 上：内部块的这个点最多升到四度。与此同时，每块的中心 a, b 一直保持 Δ 度。因此加桥不会抢走“最繁忙路口”的位置。

再讲精确

固定整数 $\Delta \geq 6$，令

$$t = 3, \qquad r = \Delta - 3 \geq 3.$$

取 $k \geq 1$ 份 $H_{3,\Delta-3}$，把相邻两块的 c_1 用桥连接，所得图记为 $C_{\Delta,k}$。
单块中各类度数为：

- $d(a) = d(b) = t + r = \Delta$；
- $d(x_i) = d(c_j) = 2$；
- $d(d_j) = r + 1 = \Delta - 2$。

加桥后，端块的 c_1 度数至多 3，内部块的 c_1 度数至多 4；其他点度数不变。因此所有桥端点度数至多四，而 $\Delta \geq 6$，不会超过 a, b 的 Δ。每块的 a, b 仍达到 Δ，故

$$\boxed{\Delta(C_{\Delta,k}) = \Delta}.$$

为什么这一步是真的

$k=1$ 时没有桥，但每块 a,b 本来就有度数 Δ；$k=2$ 时两个 c_1 各只升到三；$k\geq 3$ 时内部 c_1 才可能升到四。无论哪种边界，达到最大度的证人始终是 a,b，所以“实际最大度”不是由桥端点猜出来的。

跟着做一遍

取 $\Delta=8,k=4$。此时 $t=3,r=5$。每块 a,b 度数 8；d_j 度数 6；x_i,c_j 原度数 2。两端块的 c_1 升到 3，两个内部块的 c_1 升到 4。度数最大值仍为 8，且每块的 a,b 都达到。

半开放演练 取 $\Delta=6,k=3$。单块 $r=$ ____；a,b 度数 ____；d_j 度数 ____；中间块 c_1 新度数 ____；实际最大度 ____。

最容易掉进去的坑

错法一： 内部桥端点度数四，所以全图最大度四。最大度要比较所有点；a,b 仍为 $\Delta\geq 6$。
错法二： 加桥可能把 a,b 也升度。桥只指定连接 $c_1^{(i)}c_1^{(i+1)}$，与 a,b 不相接。
错法三： $k=1$ 没桥就不属于家族。这里与 Petersen 临界家族不同；单块本来实际最大度就是 Δ，所以允许 $k=1$。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。
L1-2 数值核对。取 $\Delta=8,k=3$，写出 t,r，并列出 a,b,d_j 与内部块 c_1 的度数。
L2-1 迁移。对 $(\Delta,k)=(7,1),(7,2),(7,4)$ 分别列桥端点最高度和达到 Δ 的顶点类型。
L2-2 一般证明。对任意 $\Delta\geq 6,k\geq 1$，按全部顶点类型证明度数都不超过 Δ，并给出达到 Δ 的证人；证明必须覆盖 $k=1,2$。
L3 证明。写出“所有点不超过 Δ”和“存在点达到 Δ”两个方向；不得只列度数表。

核对答案与推理

半开放/L1： $r=3$；a,b 度数 6；d_j 度数 4；中间 c_1 新度数 4；实际最大度 6。
L1-2： $t=3,r=5$；每块 a,b 度数 8，d_j 度数 6，中间块 c_1 从 2 升到 4。实际最大度由 a,b 达到，为 8。
L2： $k=1$ 无桥，c_1 为 2；$k=2$ 桥端点最高 3；$k=4$ 内部桥端点最高 4。三种情形中，每块 a,b 都保持度数 7 并达到实际最大度。
L3： 对 a,b 度数恰为 Δ；$d_j=\Delta-2<\Delta$；x,c 除 c_1 外为 2；c_1 加桥后至多 4，而 $4<\Delta$。故所有点度数不超过 Δ。又任取一块的 a 即有度数 Δ，所以最大度至少 Δ，合并得等号。
L2-2 六层答案：

1. **结果：** 对所有 $\Delta\geq 6,k\geq 1$，都有 $\Delta(C_{\Delta,k})=\Delta$。
2. **定义起点：** 单块取 $t=3,r=\Delta-3$；桥只接各块的 c_1。
3. **合法性：** a,b 恰为 Δ；$d_j=\Delta-2$；普通 x,c 为 2；c_1 在端块至多 3、内部块至多 4，均不超过 Δ。

4. **易错点：**不能把桥端点最高度四误当作全图最大度；还要比较未接桥的 a, b。
5. **独立复核：**$k = 1$ 时 $c_1 = 2$，$k = 2$ 时最高 3，$k \geq 3$ 时最高 4；三种情形 a, b 始终为 Δ。
6. **评分最低表述：**必须同时证明“所有点至多 Δ”和“存在点达到 Δ”，并明确桥的端点；只列一个度数表不得满分。

本卡过关门

闭卷对 $k = 1, 2, 4$ 分别说明桥端点度数，并给出统一的“上界 + 达到”证明。24 小时后随机取 $\Delta = 9, k = 5$，必须逐类说出 a, b, d_j, c_1 的度数界，不能只背“最大度不变”。

七天后红线复测（独立题面）：取 $\Delta = 8$，即每块为 $H_{3,5}$，把 $k = 6$ 块沿低度 c_1 连成链。逐类给度数上界并找达到八的点。**自校验键：**a, b 原度且仍为八；d_j 度六；未桥接的 c_j 与 x_i 度二；端块 c_1 度三，内部块 c_1 度四。所有点至多八且每块的 a, b 达到八，所以实际最大度恰为八。

2.7 卡 34：高次数链的 packing 与余量加法账

对应交互审查卡：34

前置知识：卡 15、22–23、33；需要会用直径二夹 packing，并理解每座桥给余量增加 2。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能证明 $\rho(C_{\Delta,k}) = k$，精确说明所选 a_i 的距离为何是 $|i - j| + 2$；能从单块余量与桥贡献推出

$$\mu(C_{\Delta,k}) = -2k(\Delta - 5) - 2$$

及其 gap。

先修自测（口答）

1. 每份 $H_{t,r}$ 的直径是多少?
2. $H_{t,r}$ 的单块余量是什么?
3. 余量定义中边数 m 前的系数是多少?

逐题失败路由：第 1 题错回卡 13；第 2 题错回卡 15；第 3 题错回卡 08 的余量定义。入口复测键：取 $\Delta = 7$，先算单块余量 $-2(7 - 4) = -6$，再说每座桥为何回补 2。

再讲精确

先约定：$|i - j|$ 表示整数 $i - j$ 的绝对值，也就是只看第 i 块与第 j 块相隔多少，不管谁在前。例如 $|2 - 5| = 3$。

每块 $H_{3,\Delta-3}$ 直径二，所以任意 packing 每块至多一个点，$\rho \le k$。
在第 i 块选择顶点 a_i。块间唯一桥链依次连接 $c_1^{(i)}$。对 $i<j$，从 a_i 离开本块先走边 $a_i c_1^{(i)}$，再按顺序跨越 $j-i$ 座桥，最后走边 $c_1^{(j)} a_j$，得到长度 $j-i+2$ 的路。由于这些桥是块间唯一通道，任何跨块路都必须跨越这 $j-i$ 座桥并在两端到达 c_1，所以

$$\mathrm{dist}(a_i, a_j) = |i-j| + 2 \ge 3.$$

故 $\{a_1, \dots, a_k\}$ 是 packing，$\rho \ge k$。两向合并，$\rho = k$。
每个单块余量为

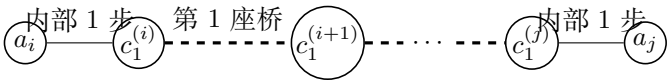
$$-(3-1)((\Delta-3)-1) = -2(\Delta-4).$$

k 块合计 $-2k(\Delta-4)$。加入 $k-1$ 座桥使 m 增加 $k-1$，余量增加 $2(k-1)$，因此

$$\begin{aligned}\mu(C_{\Delta,k}) &= -2k(\Delta-4) + 2(k-1)\\ &= -2k(\Delta-5) - 2.\end{aligned}$$

于是

$$\boxed{\tau_D(C_{\Delta,k}) - \mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(C_{\Delta,k}) = \frac{2k(\Delta-5)+2}{\Delta^2+1}}.$$



中间共跨 $|i-j|$ 座桥，两端再各加一步

新词与符号

$|i-j|$ 是整数差的绝对值，表示不管 i 大还是 j 大，只取两者相隔多少。例如 $|2-5|=3$。在块链中，它正好是从第 i 块走到第 j 块必须跨过的桥数。

先讲人话

每个积木先欠下一笔负余量；每座桥只“修回”两个单位。高次数时，每加一个新积木带来的坏账比那座新桥修回的更多，所以链越长，违反越严重。

为什么这一步是真的

“单块余量相加”需要同一个实际最大度 Δ。卡 33 已证明整条链和每块都以同一 Δ 代入；n 与 $\tau_D = n - \rho$ 按块相加，而桥只改变 m。如果最大度因拼接改变，就不能照搬这本账。

跟着做一遍

取 $\Delta = 8, k = 5$。每块余量 $-2(8-4) = -8$，五块共 -40；四座桥恢复 $2 \times 4 = 8$，所以 $\mu = -32$。公式也给

$$-2 \cdot 5(8-5) - 2 = -32, \qquad \mathrm{gap} = \frac{32}{65}.$$

完整参数复核：每块 $n = 3 + 2 \cdot 5 + 2 = 15$、$m = 6 + 15 + \binom{5}{2} = 31$；全链 $n = 75, m =$

$159, \rho = 5, \tau_D = 70$。原式得

$$8 \cdot 7 \cdot 75 + 2 \cdot 159 - 65 \cdot 70 = -32.$$

半开放演练 取 $\Delta = 7, k = 4$。单块余量 ____，四块合计 ____，三桥恢复 ____，故总余量 ____，gap = _____。

最容易掉进去的坑

错法一： $\mathrm{dist}(a_i, a_j) = |i - j|$。还要计两端从 a 到桥头 c_1 的内部边，共加 2。

错法二： 每座桥使余量更负。余量含 $+2m$，加边会增加余量 2，实际是在修回一小部分违反。

错法三： 只构造 a_i 就得 $\rho = k$。还需直径二证明每块至多一个。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 数值练习。取 $\Delta = 8, k = 5$，分别用闭式公式求余量与 gap。

L2-1 迁移。取 $\Delta = 6, k = 10$，求余量和 gap；说明尽管 $\Delta - 5$ 只有 1，为什么仍无界。

L2-2 距离等号。对任意 $i < j$，完整证明 $\mathrm{dist}(a_i, a_j) = j - i + 2$：既构造这么长的路，也证明不存在更短的路。

L3 证明。不看正文，分别证明 $\rho \le k$ 与 $\rho \ge k$，并解释距离公式中的“恰好”为什么依赖桥是块间唯一通道。

核对答案与推理

半开放/L1： 单块 $-2(7-4) = -6$；四块 -24；三桥恢复 6；总余量 -18；$\mathrm{gap} = 18/(7^2+1) = 18/50 = 9/25$。

L1-2： $\mu = -2 \cdot 5(8-5) - 2 = -32$，$\mathrm{gap} = 32/(8^2+1) = 32/65$。

L2： $\mu = -2 \cdot 10(1) - 2 = -22$，gap $22/37$。对固定 $\Delta = 6$，分母 37 固定，而分子 $2k+2$ 随 k 线性增长，故仍无界。

L3： 上界：每块直径二，packing 每块至多一点。下界：选全部 a_i；跨越相隔 $|i-j|$ 个块间位置必须过恰好相应数量的块间桥，因为这些桥是从一块到下一块的唯一通道；两端各从 a 到桥头 c_1 需一步，所以距离 $|i-j| + 2 \ge 3$。因此选集可行且大小 k。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** 若 $i < j$，则 $\mathrm{dist}(a_i, a_j) = j - i + 2$。
2. **定义起点：** 相邻块只由桥 $c_1^{(h)} c_1^{(h+1)}$ 相连，且单块中 $a_h c_1^{(h)}$ 是一条边。
3. **合法性：** 从 a_i 到本块桥头一步，跨越 $j - i$ 座桥，再从第 j 块桥头到 a_j 一步，构造长度 $j - i + 2$ 的路。
4. **易错点：** 构造一条路只证明距离至多该长度；“恰好”还需排除短路。
5. **独立复核：** 每座块间桥都是割边，任何从第 i 块到第 j 块的路都必须依次跨过全部

$j-i$ 座桥，并在两端各至少走一步到达桥头，故下界也是 $j-i+2$。

6. **评分最低表述：**必须同时给上界路径和割边下界；只写“显然等于”或遗漏两端的 $+2$ 不通过。

本卡过关门

闭卷写出 packing 的上下界和余量加法账，随机取 $(\Delta,k)=(9,3)$ 应得单块余量 -10、总余量 -26、gap $26/82=13/41$。任何一次把桥贡献符号写反，都需回卡 08、25 重学。
一天后换题：取 $(\Delta,k)=(10,4)$，从单块余量和桥贡献重算总余量与 gap；再任选第 1、4 块的 a，独立求两点距离。

2.8 卡 35：红线卡：量词完整地证明 $A_\Delta=+\infty$

对应交互审查卡：35（红线卡）

前置知识：卡 30、32、34；预备篇“上确界”“正无穷”“对任意–存在”的量词顺序。

学完本卡，你应该能做到

学完本卡，你能精确定义固定最大度的总 gap 上确界 A_Δ，并分 $\Delta=4,5,\geq 6$ 三段写出“给定任意目标 M，选择有限 k 超过它”的证明；还能说明这不代表存在无限图，也不能推出每顶点归一化 gap 无穷。

先修自测（口答）

1. 上确界是最大值吗？它一定被某个对象取到吗？
2. “无界”怎样用“对任意 M”表述？
3. 三个家族的 gap 分别是什么？

逐题失败路由：第 1 题错回 Z11“上确界不必取到”；第 2 题错回 Z11 的无界量词；第 3 题分别回卡 30、32、34 的 boxed gap。入口复测键：给任意 $M=10$，至少对一个度数家族写出一个有限整数 k 的选择。

新词与符号

对固定整数 Δ，定义

$$A_\Delta=\sup\{\tau_D(G)-\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(G):G\text{ 是有限连通图且}\Delta(G)=\Delta\}.$$

sup 读作“上确界”。写 $A_\Delta=+\infty$ 的精确意思是：这组有限图的 gap 没有任何有限共同上界。也就是对每个实数 $M>0$，都存在一张**有限**连通图 G，实际最大度恰为 Δ，且 gap 大于 M。
这里 M 只是别人任意提出的一条正数标尺，可以是整数，也可以是小数。符号 $\lceil x\rceil$ 读作

"x 的向上取整"，表示不小于 x 的最小整数，例如 $\lceil 3.2 \rceil = 4$、$\lceil 4 \rceil = 4$。

先讲人话

先把最大度旋钮固定在一个数，例如 4。然后允许图越来越大。每当你提出一根更高的标尺 M，我们都能造一张有限图把 gap 顶过标尺。这叫"没有天花板"，不是说造出了一张大小无穷的图。

再讲精确

定理。对每个整数 $\Delta \geq 4$，都有 $A_\Delta = +\infty$。

逐量词证明。固定一个整数 $\Delta \geq 4$，再任取目标 $M > 0$。

1. 若 $\Delta = 4$，卡 30 给 gap $(k+2)/17$。选择整数
$$k > 17M - 2, \qquad k \geq 2,$$
就有 $(k+2)/17 > M$。

2. 若 $\Delta = 5$，卡 32 给 gap $(k+1)/13$。选择整数
$$k > 13M - 1, \qquad k \geq 3,$$
就有 $(k+1)/13 > M$。

3. 若 $\Delta \geq 6$，卡 34 给 gap
$$\frac{2k(\Delta-5)+2}{\Delta^2+1}.$$
因为 $2(\Delta-5) > 0$，选择整数
$$k > \frac{M(\Delta^2+1)-2}{2(\Delta-5)}, \qquad k \geq 1,$$
就使 gap 大于 M。

三种情况都产生有限连通图，且前面各卡已证明实际最大度恰为所固定的 Δ。所以没有有限上界，$A_\Delta = +\infty$。

为什么这一步是真的

证明的量词顺序是

$$\text{对每个固定}\Delta \geq 4, \quad \text{对每个}M > 0, \quad \text{存在依赖于}(\Delta, M)\text{ 的有限图}G.$$

不同 Δ 可以使用不同图族，不同 M 可以选择不同 k。绝不是"一张图拥有所有最大度并超过所有标尺"。

跟着做一遍

固定 $\Delta = 5$，目标 $M = 100$。需要 $(k+1)/13 > 100$，即 $k > 1299$；取有限整数 $k = 1300$ 即可。图有 $n = 13000$ 个顶点，仍是有限图，实际最大度始终五，gap 为 $1301/13 > 100$。

半开放演练 固定 $\Delta = 6, M = 10$。需要 $(2k+2)/37 > 10$，所以可取整数 $k =$ _____（给出一个具体值即可）。

最容易掉进去的坑

错法一： $A_\Delta = +\infty$ 表示某张图 gap 等于无穷。所有构造图都有限、参数都有限；无穷描述的是整组数没有上界。

错法二： 总 gap 无界，所以每顶点 gap 也无界。以 $P_{4,k}$ 为例，gap 约为 $k/17$，但顶点数是 $10k$，二者相除约为 $1/170$，保持有限。归一化量会在卡 42 正式定义。

错法三： 用最大度“至多 Δ”的图证明“恰为 Δ”的集合无界。三个上游家族都专门证明了实际最大度等号。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。完成半开放演练。

L1-2 选参。固定 $\Delta = 6, M = 1$，求一个最小的合法整数 k，使本家族 gap 大于 1。

L2-1 迁移。对 $M = 50$，分别给 $\Delta = 4, 5, 8$ 选一个合法整数 k，并核对对应 gap 确实大于 50。

L2-2 否定修补。假设有人声称对固定 Δ 存在有限常数 C_Δ，使所有相应连通图都满足 $\tau_D \le \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} + C_\Delta$。用 $A_\Delta = +\infty$ 写出严格反证，并再解释为什么向上取整也失败。

L3 解释。说明本定理为什么排除了任何固定加性修正 C_Δ，并说明为什么向上取整 $\lceil \mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(G) \rceil$ 也不能修复猜想。

核对答案与推理

半开放/L1： 需 $2k+2 > 370$，即 $k > 184$；取 $k = 185$，gap $372/37 > 10$。

L1-2： 需 $(2k+2)/37 > 1$，即 $k > 17.5$；最小整数为 $k = 18$，gap $= 38/37 > 1$。

L2： $\Delta = 4$ 需 $k > 848$，取 849，gap $851/17 > 50$；$\Delta = 5$ 需 $k > 649$，取 650，gap $651/13 > 50$；$\Delta = 8$ 的 gap 为 $(6k+2)/65$，需 $6k+2 > 3250$，取 $k = 542$，gap $3254/65 > 50$。所有 k 满足各自边界。

L3： 若存在有限 C_Δ 使所有同度连通图满足 $\tau_D \le \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} + C_\Delta$，那么所有 gap 都被 C_Δ 上界，与 $A_\Delta = +\infty$ 矛盾。取一个 gap 大于 1 的家族成员，则 $\tau_D > \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} + 1 \ge \lceil \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} \rceil$，所以简单向上取整也失败。

L2-2 六层答案：

1. **结果：** 任何有限固定修正常数 C_Δ 与简单向上取整都不能修复原猜想。
2. **定义起点：** $A_\Delta = +\infty$ 表示对每个实数 $M > 0$，存在有限连通图、实际最大度恰为 Δ，其 gap 大于 M。
3. **合法性：** 若有限 C_Δ 有效，取 $M = C_\Delta$；无界性给出 gap $> C_\Delta$ 的图，直接违背所声称的不等式。
4. **易错点：** 不能说某一张图的 gap 等于无穷；每张见证图都有限，只是可以随 M 改选 k。
5. **独立复核：** 再取 $M = 1$ 得 gap > 1，故 $\tau_D > \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} + 1 \ge \lceil \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} \rceil$，向上取整仍被违反。

6. **评分最低表述：**必须明确“先固定 Δ、再任取 M、最后选依赖于二者的有限图”；量词顺序错则整题不通过。

本卡过关门

闭卷先写 A_Δ 的集合与上确界定义，再按 $4, 5, \geq 6$ 三段完成“任意 M–选择 k”证明。口头解释总 gap 与每顶点 gap 的区别。24 小时后由他人随机给 (Δ, M)，你必须现场选出合法有限 k；红线项全对才通过。

七天后红线复测（独立题面）：固定目标 $M = 50$，分别在 $\Delta = 4, 5, 8$ 三种家族中给出一个明确有限整数 k 使 gap 大于 M，并写出所用公式。**自校验键：**$\Delta = 4$ 用 $(k+2)/17$，可取 $k = 849$；$\Delta = 5$ 用 $(k+1)/13$，可取 $k = 650$；$\Delta = 8$ 用 $(6k+2)/65$，可取 $k = 542$。三者均满足各自合法起点；只写“取充分大”不算完成本题。

第四篇篇章总门

本卡过关门

不看讲义完成以下混合测验：

1. 用二元素子集证明 Petersen 图的 $(q, r, \mathrm{diam}) = (10, 3, 2)$；
2. 分别解释不同端口与同根方案为何给实际 $L = 1, 2$，并守住 $k \geq 2, 3$；
3. 随机取一个 k 重算 $P_{4,k}$ 或 $P_{5,k}$ 的全部参数；
4. 对随机 $\Delta \geq 6, k$ 重建 H-链的最大度、packing 与余量；
5. 用完整量词说出并证明 $A_\Delta = +\infty$，同时指出它不能推出归一化 gap 无穷。

五题至少 85%，且卡 29、31、33、35 对应题全部正确，才进入下一篇。

第二部分

计算证据与最小见证

第三章　第五篇：最小见证与计算证据

这一篇只回答一个有限问题：**反例最早能在多少个顶点上出现？**我们会先亲手核对一个八顶点反例，再解释计算机怎样无遗漏地检查零至七阶的全部图。请一直记住：有限穷举能证明“七阶以前没有”，却不能证明含有任意大参数的图族，更不能证明文献新颖性。

本篇入口规则：每张卡的三道入口题必须全部答对才可继续；任一题错误，必须按该卡给出的回退路由复习后重新作答，不能带错进入正文。

3.1　卡 36：$H_{2,2}$ 的手算证书

学完本卡，你应该能做到

不借助任何程序，重画 $H_{2,2}$，算出

$$n = 8, \quad m = 11, \quad \Delta = 4, \quad \rho = 1, \quad \tau_D = 7, \quad \mu = -1,$$

并把猜想失败写成整数比较 $119 > 118$ 和加性差 $1/17$。

前置知识：卡 11、12、14、15；若忘记“阶、边数、度、打包、余量”，回看零基础预备课。

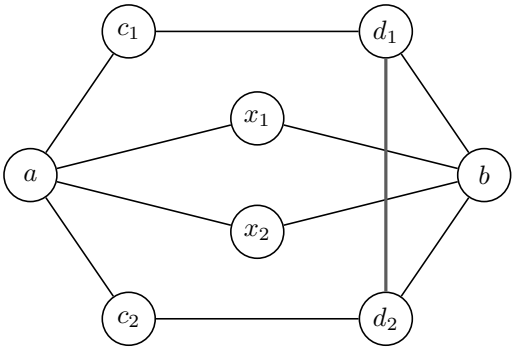
入口自测　先口答三问：（1）n 数什么？（2）最大度为什么必须是实际达到的度数？（3）为何直径二会迫使打包至多含一个点？有一问答不出，就先回到对应先修卡。

先讲人话

这张八点图是一张可以放进钱包的“反例身份证”。身份证上不能只写“程序说它违规”，而要列出全部点、全部边和一条任何人都能复算的不等式。

新词与符号

手算证书	可独立复核的有限数据	点名、边表、度数、距离和整数算式都写全
μ	读作“缪”	猜想右边清分母后减去左边；负数表示反例
加性差	$\tau_D - \mathsf{B}_{\mathrm{HY}}$	超出猜想上界的真实有理数大小



粗线是 D 中两点之间的团边

再讲精确

令

$$V = \{a, b, x_1, x_2, c_1, c_2, d_1, d_2\}.$$

边分成三组：

$$\begin{aligned}
&ax_1, bx_1, ax_2, bx_2 && \text{（经 } X \text{ 的四条边），}\\
&ac_1, c_1d_1, d_1b, ac_2, c_2d_2, d_2b && \text{（两条长度三的路），}\\
&d_1d_2 && \text{（} D \text{ 中的团边）．}
\end{aligned}$$

所以 $n = 8, m = 4 + 6 + 1 = 11$。各点的度数为

$$d(a) = d(b) = 4, \quad d(d_1) = d(d_2) = 3, \quad d(x_i) = d(c_i) = 2,$$

故实际最大度 $\Delta = 4$，度数和 $4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 22 = 2m$。

为什么这一步是真的

前面已经逐类证明一般图 $H_{t,r}$ 的直径为二；这里为八点图把遗漏风险彻底消掉。相邻点距离为一，只需检查非邻接类型：

非邻接类型	长度二的路	非邻接类型	长度二的路
a, b	$a - x_1 - b$	a, d_i	$a - c_i - d_i$
b, c_i	$b - d_i - c_i$	x_1, x_2	$x_1 - a - x_2$
x_i, c_j	$x_i - a - c_j$	x_i, d_j	$x_i - b - d_j$
c_1, c_2	$c_1 - a - c_2$	$c_i, d_j\ (i \neq j)$	$c_i - d_i - d_j$

任意非邻接对都落在表中，所以任意两点距离至多二；而 a, b 不相邻，距离不是一，故直径恰为二。因此打包至多含一个点。单独选任一点总是一个打包，所以

$$\rho = 1.$$

补集恒等式 $\tau_D + \rho = n$ 随即给出 $\tau_D = 8 - 1 = 7$。

跟着做一遍

把参数代进 Henning–Yeo 右端：

$$\mathsf{B}_{\mathrm{HY}} = \frac{\Delta(\Delta-1)n+2m}{\Delta^2+1} = \frac{4\cdot 3\cdot 8+2\cdot 11}{4^2+1} = \frac{118}{17}.$$

而 $\tau_D = 7 = 119/17$。所以猜想要求的 $119 \le 118$ 是假的。余量和加性差分别为

$$\mu = 118-119 = -1, \qquad \tau_D - \mathsf{B}_{\mathrm{HY}} = \frac{119-118}{17} = \frac{1}{17}.$$

每一行都只是整数算术；没有一步需要相信程序。

先遮住答案，自己做

半开放任务 B。改用不同参数的图 $H_{3,2}$。请只凭一般构造补完：

$$n = 3+2\cdot 2+2 = ____, \qquad m = 2\cdot 3+3\cdot 2+\binom{2}{2} = ____.$$

再由“直径二”得到 $\rho = 1$，依次求出实际最大度 Δ、τ_D、整数余量与加性差，并把猜想失败清分母写成两个相差二的整数比较。每一步必须写出依据，不能套用本卡八点图的数据。

最容易掉进去的坑

- 把 $7 > 118/17$ 写成“差一”：真实有理数差是 $1/17$；只有清分母后的整数余量差一。
- 只找到一个七点识别覆盖，就宣称 $\tau_D = 7$：还需要 $\rho = 1$ 与补集恒等式排除更小的覆盖。
- 把顶点数八误当成最大度八：最大度是单个点连接的边数，实际为四。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。按三类边重新数出 m，再用度数和独立复核。
L1-2 模仿。只看度序列 $(4,4,3,3,2,2,2,2)$，求边数并说明为什么必须除以二。
L2-1 迁移。不看上文，从 $n = 8, m = 11, \Delta = 4, \rho = 1$ 出发，用度亏损余量式

$$\mu = (\Delta^2+1)\rho - ((\Delta+1)n - 2m)$$

重算 μ。
L2-2 迁移。不用余量式，直接由 $\tau_D = 7$ 与 $\mathsf{B}_{\mathrm{HY}} = 118/17$ 求 gap，并说明它和整数余量 -1 为什么符号相反、大小差一个分母 17。
L3 解释。向一个只会分数的小学生解释：为什么 $119 > 118$ 已足以推翻一个声称“所有图都满足”的猜想？

核对答案与推理

半开放任务： 对 $H_{3,2}$，$n=9$，$m=13$，$\Delta=3+2=5$，$\rho=1$，故 $\tau_D=9-1=8$。猜想右端清分母后的分子为

$$5\cdot 4\cdot 9+2\cdot 13=206,$$

真实左端清分母后为 $(5^2+1)\cdot 8=208$，所以 $206<208$；整数余量为 -2，加性差为 $2/26=1/13$。

L1-1： 三类边为 $4,6,1$，合计 11；度数和为 22，除以二仍得 11。

L1-2： 度数和是 22；每条边在两个端点各被数一次，所以 $m=22/2=11$。

L2-1：

$$\mu=17\cdot 1-(5\cdot 8-22)=17-18=-1.$$

这条路线没有使用 $\tau_D=7$ 直接代定义，因此是一次独立代数复核。

L2-2： $7-118/17=(119-118)/17=1/17$。余量定义为“猜想右端清分母后的分子减去真实左端”，所以反例时为 -1；gap 定义为“真实值减猜想右端”，所以为 $+1/17$。

L3： “所有图都满足”没有例外；找到一张合法图使左边 119 大于右边 118，就找到了一个例外。一个例外足以否定全称命题，但不能否定原作者已经证明的其他特殊情形。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** gap $=1/17$，整数余量 $=-1$。
2. **定义起点：** $g=\tau_D-\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}$，而 $\mu=(\Delta^2+1)(\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}-\tau_D)$。
3. **合法性：** $\Delta^2+1=17>0$，故乘除不会再改变既有等式，只把单位从分数换成整数。
4. **易错：** 把“清分母后差一”说成真实 gap 等于一，或把余量和 gap 写成同号。
5. **复核：** 直接算 $17g=17\cdot 7-118=1$，所以 $\mu=-17g=-1$。
6. **评分：** 两个数各 2 分；定义关系 2 分；解释符号 2 分；独立复核 2 分。最低合格必须说出分母 17 和相反号。

本卡过关门

合上本卡，在白纸上完成四项：☐ 重画八点图；☐ 写全十一条边；☐ 算出六个参数；☐ 在一分钟内解释 $\mu=-1$ 与 gap $=1/17$ 的区别。任一项需要偷看，就暂不通过。**一天后再来：** 换成 $H_{2,3}$，只凭构造重算 $n,m,\Delta,\rho,\tau_D,\mu$；核对键为 $(10,16,5,1,9,-2)$。六项全对且能说明直径二的类型覆盖才通过。

对应交互审查卡：36

3.2 卡 37：graph6、同构与既有来源

学完本卡，你应该能做到

解释为什么换点名不会换图；核验 $H_{2,2}$ 到编码 GXFGXC 的显式重标号；清楚区分“编码证据”“同构证据”和“该图以前因另一问题出现过的来源证据”。

前置知识： 卡 36；零基础预备课中的集合、图与双向证明。

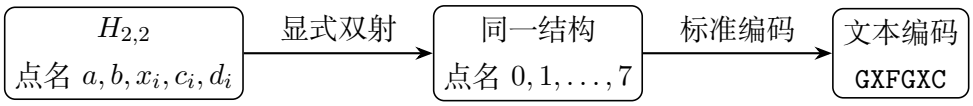
入口自测 （1）把一张纸上的点名全部换掉，哪些东西必须保持？（2）十一条边映射成十一条边能说明什么？（3）同一图以前出现过，是否自动说明当前定理已知？回退路由：第（1）题错，回零基础预备篇“图与同构”；第（2）题错，回卡 36 的完整边表；第（3）题错，回本篇开头“计算只证明什么”并区分对象来源与性质来源。

先讲人话

同一个人可以有中文名、英文名和身份证号。名字不同，不等于人不同；身份证号相同，也不自动说明这个人以前做过你现在研究的事情。图的点名、graph6 编码和研究结论也是这三层。

新词与符号

同构	存在一个顶点一一对应，且保边、保非边	说明两张画法有同一连接结构
重标号	只更换顶点名字	是同构的最直接形式
graph6	简单无向图的紧凑文本编码	便于存储和交换，不是数学证明
provenance	来源记录、来历	说明对象何时在哪里出现，不自动说明当前性质已研究



再讲精确

从构造点名到编码代表点名的映射为

$$a \mapsto 2, b \mapsto 5, x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 1, c_1 \mapsto 3, c_2 \mapsto 7, d_1 \mapsto 4, d_2 \mapsto 6.$$

这是八个不同点到 $0, \ldots, 7$ 的一一对应。把卡 36 的十一条边逐条映射，得到

$$02, 12, 23, 34, 05, 15, 45, 46, 56, 27, 67.$$

下面不用电脑手解 GXFGXC。每个字符先换成“ASCII 编号减 63”：

$$\texttt{G,X,F,G,X,C} \longmapsto 8, 25, 7, 8, 25, 4.$$

首值 8 是顶点数。余下五个数各写成恰好六位的二进制：

$$25 = 011001, \quad 7 = 000111, \quad 8 = 001000, \quad 25 = 011001, \quad 4 = 000100.$$

拼成位串

$$011001\,000111\,001000\,011001\,000100.$$

对八顶点图，只读前 28 位；最后两位是补齐六位分组所用的零。前 28 位依次对应

$$01; 02, 12; 03, 13, 23; \ldots; 07, 17, 27, 37, 47, 57, 67.$$

某位置为 1 就取对应边，为 0 就不取。逐位读出

$$02, 12, 23, 34, 05, 15, 45, 46, 56, 27, 67,$$

恰是上面的十一条边。因此映射保边；两边均只有十一条边且映射是双射，所以也没有额外边，故两图同构。

为什么这一步是真的

短编码如何装下一张图？对八顶点图，首字符 `G` 记录顶点数八；其余字符提供只取零或一的位，按“先固定较大的端点 $j = 1, 2, \ldots, 7$，再令较小端点 $i = 0, 1, \ldots, j-1$”的顺序回答“ij 是否有边”。八个点的无序点对共有

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

对；符号 $\binom{8}{2}$ 读作“八选二”。六位二进制的位权从左到右是 $32, 16, 8, 4, 2, 1$，所以 $25 = 16 + 8 + 1$ 写成 011001。至此每个换算动作都能纸笔复核，不必相信黑箱解码器。编码能让别人恢复图，却不证明 $\rho = 1$、$\tau_D = 7$ 或“阶最小”；这些性质仍需卡 36 与后续穷举论证。

跟着做一遍

检查三条不同类型的边：$ax_1 \mapsto 20 = 02$，$c_1d_1 \mapsto 34$，$d_1d_2 \mapsto 46$，都在解码边表中。再检查一个非边：$ab \mapsto 25$，解码边表中没有 25。完整核验就是把这个动作做完十一条边，并确认没有多余边。

先遮住答案，自己做

半开放任务 B。取另一映射的半成品

$$a \mapsto 2,\ b \mapsto 5,\ x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 1,\ c_1 \mapsto 7,\ d_1 \mapsto 6.$$

在未使用的数字 $3, 4$ 中补出 c_2, d_2，使 ac_2, c_2d_2, d_2b 分别映成目标边；再检查 c_1c_2 仍为非边。

纸笔解码复测。遮住上文，用字符值 $25, 7$ 重写前十二位 011001000111；按 $01; 02, 12; 03, 13, 23; 04, 14, 24, 34; \ldots$ 对齐，核对前十一位中恰得到 $02, 12, 23, 34$。若

任一步错，回到 formal 框的“字符值、六位二进制、边位序”三层逐层重做。

学术边界

$H_{2,2}$ 的一个同构副本曾在“最小故障代价为三”的研究中出现，并收入 House of Graphs 记录 53055。该来源证明**这个无标号图形以前出现过**；它并不证明那项工作研究过识别顶点覆盖、打包数或 Henning–Yeo 猜想。反过来，本文也不能隐瞒这个图形来源。对象来源与性质新颖性必须分别陈述。

最容易掉进去的坑

“编码相同”不是凭肉眼判断；必须按同一标准解码。“看起来一样”也不是同构证明；必须给双射并检查邻接。最严重的两种相反错误是：把“图以前出现过”夸成“当前结论以前已知”，或为了新颖性而不披露已知图形来源。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。把边 bx_2, ac_2, c_2d_2, d_2b 映射到数字点名。

L1-2 模仿。用主映射检查非边 ab, c_1c_2, x_1x_2 都映成非边。

L2-1 迁移。有人只检查十一条边都映成边，却没有确认映射是否一一对应。给出为何这还不够的理由。

L2-2 迁移。证明：若顶点映射是双射、源图和目标图边数都为 11，且源图每条边都映成目标边，那么无需再查全部非边也可推出同构。指出三个假设各在哪里用到。

L3 解释。分别用一句话说清：(a) `graph6` 解码；(b) 显式同构；(c) House of Graphs 来源，各自支持什么、不支持什么。

核对答案与推理

半开放任务： $c_2 \mapsto 3, d_2 \mapsto 4$；三条边映成 $23, 34, 45$，而 $c_1c_2 \mapsto 37$ 不在目标边表。

L1-1： $bx_2 \mapsto 51 = 15$，$ac_2 \mapsto 27$，$c_2d_2 \mapsto 76 = 67$，$d_2b \mapsto 65 = 56$。

L1-2： $ab \mapsto 25, c_1c_2 \mapsto 37, x_1x_2 \mapsto 01$，三对都不在目标边表。

L2-1： 若两个原顶点被送到同一个目标点，边可能被挤在一起，无法得到结构的一一对应；同构首先要求顶点双射。

L2-2： 双射使不同源边的端点对仍不同；因此 11 条源边映成目标图中 11 条不同边。目标图总共只有 11 条边，所以目标边已经全部用完，非边不可能被映成边。

L3： 解码支持“这串字符恢复哪张标号图”，不支持图参数；显式同构支持“两套点名是同一结构”，不支持阶最小；来源支持“该结构已有出现记录”，不支持当前猜想结论已经被研究。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** 在三个假设下，映射既保边也保非边，所以是图同构。
2. **定义起点：** 图同构是顶点双射，且一对点相邻当且仅当像相邻。
3. **合法性：** 双射保证源边不会合并；保边给目标边子集；相同边数把这个子集逼成整个目标边集。

4. **易错：**没有双射时，十一条记录可能重合；没有相同边数时，目标图可能还有额外边。
5. **复核：**任取主映射下三个非边 $25, 37, 01$，都确实不是目标边。
6. **评分：**定义 2 分，三个假设各 2 分，非边结论 2 分。最低合格必须说出“双射防重”和“边数相等填满目标边集”。

本卡过关门

闭卷写出八点映射，并随机抽三条边、一条非边核验。随后口头说出“同构旧、性质可能新”与“对象来源必须披露”这两个不冲突的判断。**一天后再来：**使用另一组已逐边核验的显式同构 $(a, b, x_1, x_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \mapsto (2, 5, 0, 1, 7, 3, 6, 4)$，独立核验十一条边以及至少三条非边。不要把这组映射误称为 House of Graphs 提供的映射。核对时应得到与主映射相同的目标边集；可先抽查 $ax_1 \mapsto 02, c_1d_1 \mapsto 67, c_2d_2 \mapsto 34$，再完成余下边。

对应交互审查卡：37

3.3 卡 38：穷举宇宙的完整性

前置知识：卡 01、36–37；零基础预备课中的加法、集合与“对所有”。若要亲自运行目录与 checker，还需先通过卡 65 和附录“从零开始使用电脑与 Python”。冻结输入、每阶计数、哈希和运行日志见第四册附录“卡 61–68 受控离线证据包”的 M65。

学完本卡，你应该能做到

说明为什么检查零至七阶全部非同构简单图就覆盖了所有候选；核对每阶数量及总数 1,253；解释为何不能只检查连通图。

入口自测 （1）“至多七阶”包括哪些顶点数？（2）同构图为什么可只留一个代表？（3）论文命题说的是所有图还是只说连通图？回退路由：第（1）题错，回零基础预备篇“整数范围”；第（2）题错，回卡 37 的同构定义；第（3）题错，回本篇章首，重新圈出命题中的量词与图类。

先讲人话

想证明一盒弹珠没有红色，必须先知道盒里所有弹珠都摆上了桌。程序跑得再快，若输入只是一半，结论仍不完整。计算证明的第一层不是代码，而是**候选宇宙有没有漏**。

新词与符号

阶	顶点个数 n	“至多七阶”包含 $n = 0, 1, \ldots, 7$
标号图	点名固定的图	换点名可能产生大量重复
非同构图	每种连接结构只留一份	对同构不变的性质，查代表就够
目录/图册	经过生成与整理的完整代表集	必须记录来源、数量和哈希

阶 n	0	1	2	3	4	5	6	7	合计
非同构简单图数	1	1	2	4	11	34	156	1044	1253

再讲精确

图是否违反 Henning–Yeo 界只取决于连接结构，不取决于点叫 a 还是 7。因此每个同构类检查一个代表即可。按上表相加：

$$1+1+2+4+11+34+156+1044=1253.$$

Read–Wilson/NetworkX 图册直接给出这 1,253 个代表。另一来源的 McKay 文件给出二至七阶

$$2+4+11+34+156+1044=1251$$

个代表，再加入唯一的零阶图和唯一的一阶图，也得到 1253。

为什么这一步是真的

为何非同构代表足够？若 G 与 H 同构，则同构会保持顶点数、边数、度数、距离、识别覆盖和打包，所以也保持 μ 的符号。任何一个至多七阶的标号图都属于表中某个同构类，检查该类代表就等于检查它。

为何不能只查连通图？本节命题是“**所有**至多七阶图都不是反例”。若输入主动删掉非连通图，就没有覆盖命题的量词。即使我们最后特别喜欢连通反例，也不能用喜好缩小一个更强命题的输入宇宙。

跟着做一遍

三顶点简单图按结构共有四种：零条边；一条边加一个孤立点；两条边组成路径；三条边组成三角形。给点换名会产生许多标号画法，但不会出现第五种连接结构。这就是“标号很多、非同构代表只有四个”的最小示范。

先遮住答案，自己做

半开放任务 B。补表并求和：$n=0,1,2,3,4$ 的非同构简单图数依次为

$$1,\ 1,\ ___,\ 4,\ ___.$$

已知五项总和为 19，先补两个空，再解释为什么这些数统计“结构代表”而不是所有点名方式。

最容易掉进去的坑

- 把 1251 写成全部数目：它缺少零阶和一阶两个图。
- 只枚举连通图：无法支持正文当前的“所有图”命题。
- 枚举所有标号图却不去重：原则上仍可覆盖，但重复极多；更危险的是误把重复记录数当不同结构数。

- 有正确总数但来源不固定：未来下载内容变化时无法确认检查的是同一批输入。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。不看表，重新相加八个阶数的数量，并说明 $1251 + 2 = 1253$ 中的“二”是什么。

L1-2 模仿。解释为什么零阶空图和一阶单点图各恰有一个同构类。

L2-1 迁移。若只想证明“没有至多七阶的连通反例”，输入宇宙可以怎样缩小？为什么这不能反过来支持更强的“所有图”结论？

L2-2 迁移。比较“枚举全部有标号图”和“每个同构类取一个代表”：二者为何都可能覆盖宇宙？前者的重复会带来哪两种审计风险？

L3 解释。有人说：“我生成了一百万张随机七点图，没发现反例，所以穷举完成。”指出量词错误。

核对答案与推理

半开放任务：两个空为 $2, 11$；这里每种点名互换后不改变邻接结构的图只保留一个代表。

L1-1：总和为 1253；“二”是零阶空图和一阶单点图各一张。

L1-2：空顶点集上只能有空边集；单点之间也没有可选的两点边，故两种阶数都只有一张简单图。

L2-1：可只保留每阶连通非同构代表；这足以回答连通版本，却没有检查非连通图，所以逻辑上不能推出全体版本。

L2-2：全部有标号图包含每个结构，所以原则上覆盖；同构代表集用“每类至少一个”覆盖。前者重复极多，既浪费运行，也容易把重复记录数误报为不同结构数。

L3：随机样本即使很多，也不保证每个同构类至少出现一次；“没抽到反例”不是“所有候选都不是反例”。完整目录加覆盖证明才叫穷举宇宙。

L2-2 六层答案。

1. **结果：**两种宇宙都可完整，但非同构代表集更精简、计数含义更清楚。
2. **定义起点：**完整覆盖要求每个待审结构至少出现一次，不要求恰出现一次。
3. **合法性：**所有有标号图当然含每个点名版本；代表集则需生成器/图册保证每个同构类恰有代表。
4. **易错：**把运行记录条数当成非同构类数，或去重时误删整个同构类。
5. **复核：**三点图有 $2^3 = 8$ 个有标号边集，却只有四个非同构结构，可手工分类核对。
6. **评分：**两种覆盖理由各 2 分，两种风险各 2 分，三点复核 2 分。最低合格必须区分“至少一个代表”和“无重复代表”。

本卡过关门

闭卷写出 $n = 0$ 到 7 的八个计数，算出 1253，再用“同构不变量”和“量词覆盖”各说一句为什么该宇宙完整。**一天后再来：**把八个计数打乱写在纸上，再按阶复原。核对键为

$1, 1, 2, 4, 11, 34, 156, 1044$；总和 1253，其中 1251 缺零阶和一阶各一张。

对应交互审查卡：38

3.4 卡 39：主检查器：直接照定义计算

学完本卡，你应该能做到

把识别顶点覆盖的定义翻译成穷举伪代码；在四点路径上手动模拟；证明算法没有漏掉任何候选集合，并只用整数比较判定余量。

前置知识： 卡 02、08、38；零基础预备课中的子集与最小值。

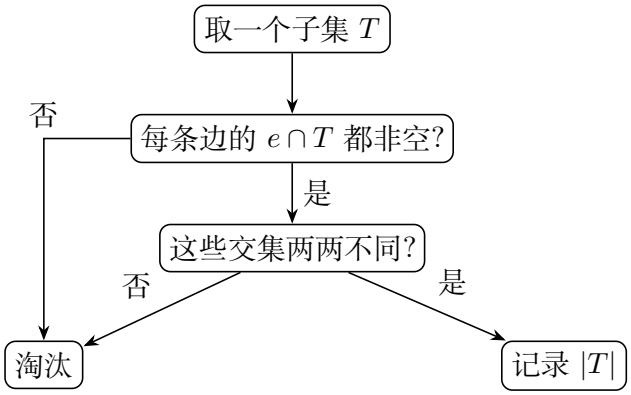
入口自测 （1）一个 n 元集合有多少个子集？（2）边的“指纹”是什么？（3）证明最小值为何要排除所有更小候选？回退路由：第（1）题错，回零基础预备篇“子集枚举”；第（2）题错，回卡 02；第（3）题错，回卡 38 的“完整目录”与卡 36 的八阶见证，重画上下界合拢图。

先讲人话

主检查器像一个极有耐心的验票员：它把每一种选点方案 T 都拿起来，对每条边看票；只要有一条边没被碰到，或两条边盖出相同印章，就淘汰这份方案。

新词与符号

子集枚举	尝试 V 的每一种选法	n 个点共有 2^n 个子集
trace/迹/指纹	$e \cap T$	边 e 在所选点集里留下的端点
定义级 checker	直接检查定义，不调用结论公式	便于发现公式实现错误
伪代码	给人读的算法步骤	不依赖某种编程语言语法



再讲精确

直接算法可以写成：

1. 令当前最好值为 $n+1$；
2. 对 $V(G)$ 的每个子集 T：
   (a) 对每条边 e 计算集合 $e \cap T$；
   (b) 若有空交集，则 T 不是顶点覆盖；
   (c) 若两个不同边的交集相等，则 T 不能识别它们；
   (d) 两项都通过时，用 $|T|$ 更新最小值；
3. 输出最小值 $\tau_D(G)$；从输入边表计算实际 n, m, Δ，再算整数余量

$$\mu = \Delta(\Delta-1)n + 2m - (\Delta^2+1)\tau_D.$$

若按子集大小从小到大枚举，一旦某个大小出现可行集合，可在该大小全部必要检查后确定最小值；所有更小大小已经排除。

为什么这一步是真的

完整性来自一个简单事实：每个候选识别覆盖都是 $V(G)$ 的某个子集，而算法逐个访问全部 2^n 个子集。对每个子集，它逐条执行定义中的两个“且”条件。因此若存在更小识别覆盖，它必会在对应循环中被发现。这里不是靠测试若干聪明候选，而是让候选全集与数学定义逐项对齐。

跟着做一遍

考虑四点路径 1–2–3–4。空集失败；任意单点都不可能碰到三条边。检查二点集 $T = \{2,3\}$：

$$12 \cap T = \{2\}, \qquad 23 \cap T = \{2,3\}, \qquad 34 \cap T = \{3\}.$$

三个指纹非空且互不相同，所以 T 可行。所有大小零、一的集合已经排除，故 $\tau_D = 2$。这就是程序循环的手工缩影。

先遮住答案，自己做

半开放任务 B。在三点星（即路径 $1-2-3$）上，按大小先查 $T = \varnothing$ 和三个单点集，再查二点集。请补：第一个可行大小是 ____；一个可行集合是 _____；它给两条边的 trace 分别是 _____。

最容易掉进去的坑

只检查“每条边被覆盖”会算成普通顶点覆盖；只检查“指纹不同”却允许空指纹，会改变参数定义。另一个危险是使用浮点数比较原分式：接近整数边界时可能有舍入误差。用 μ 的整数算式可避免这一问题。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。在三角形 K_3 上逐个检查 $T = \{1\}$ 与 $T = \{1, 2\}$，求 $\tau_D(K_3)$。

L1-2 模仿。对四点路径的 $T = \{1, 3\}$ 写出三条 trace，并判断失败发生在覆盖还是区分。

L2-1 迁移。写出用二进制串（只含 0 和 1 的短串）枚举五点图全部子集的方法，并说明共有多少串。

L2-2 迁移。若程序按子集大小从小到大运行，并在找到第一个可行集合时立即停止，说明为何仍能得到最小值；再说明若按任意顺序运行，为什么不能这样立即停止。

L3 解释。为什么“程序调用一个名叫 identifying_cover 的黑箱函数”不如上述定义级路线可审计?

核对答案与推理

半开放任务：第一个可行大小为 2；例如 $T = \{1, 2\}$，两条 trace 是 $\{1, 2\}$ 与 $\{2\}$。

L1-1：$\{1\}$ 漏掉边 23；$\{1, 2\}$ 给三条边的指纹 $\{1, 2\}, \{2\}, \{1\}$，非空且不同，所以 $\tau_D(K_3) = 2$。单点均失败，故不是只证明“至多二”。

L1-2：三条 trace 为 $\{1\}, \{3\}, \{3\}$；都非空，但后两条相同，所以失败在区分。

L2-1：用五位 0/1 串，某位为一表示选该点，共 $2^5 = 32$ 串；每个子集与一串唯一对应。

L2-2：按大小递增时，首次可行集合之前的所有更小大小已经全查完，故首次大小就是最小值；任意顺序可能先遇到一个很大的可行集，仍有未访问的更小集合。

L3：黑箱可能使用不同定义或有边界约定；定义级伪代码把每个判断对应到论文原定义，审查者可用小图逐步复算。

L2-2 六层答案。

1. **结果：**大小递增允许首次可行即确定最小大小；任意顺序不允许。
2. **定义起点：**τ_D 是所有可行 T 的 $|T|$ 最小值。
3. **合法性：**停止前每个更小大小的所有集合都已被访问并判失败。
4. **易错：**只排除了若干更小集合就说“所有更小集合失败”。
5. **复核：**把顺序故意改成先访问 $V(G)$；它通常可行，但显然未必最小，说明任意顺序不能早停。
6. **评分：**最小值定义 2 分、穷尽较小大小 4 分、任意顺序反例 2 分、边界表述 2 分。最低合格必须出现“所有更小集合已排除”。

本卡过关门

不看讲义写出六至十行伪代码，并在任意四点图上手跑。必须能指出覆盖检查、识别检查、最小化、实际最大度和整数余量分别在哪一步。**一天后再来：**在四点星 $K_{1,3}$ 上按子集大小模拟；核对键为 $\tau_D = 3$。可选中心加任意两片叶，或选三片叶；必须逐类排除大小 $0, 1, 2$。

对应交互审查卡：39

3.5 卡 40：独立检查器与可复现证据

学完本卡，你应该能做到

识别真正有意义的交叉验证：更换数据来源、参数计算路线或实现依赖；说明补充文件中的版本、哈希、测试和清单分别防什么风险。

前置知识： 卡 06、38、39。

入口自测 （1）同一程序连续跑两遍会排除哪类错误？（2）$\tau_D + \rho = n$ 提供哪条不同计算路线？（3）哈希相同能证明数学正确吗？回退路由：第（1）题错，回本卡先修中的“独立实现”概念；第（2）题错，回卡 06 与卡 39；第（3）题错，回卡 38 的证据边界，重写“字节一致”和“数学正确”各自能支持的结论。

先讲人话

两个人照着同一张抄错的答案表念两遍，不叫独立核对。更可靠的办法是：一个直接数识别覆盖，另一个数打包；一个读图册，另一个自己解码另一套数据。它们若在每张图上相遇，许多单点故障就更难同时躲过。

	路线 A	路线 B/补充路线
输入图	Read–Wilson/NetworkX atlas	McKay 分阶 `graph6` 文件
核心参数	直接枚举 T 求 τ_D	枚举 packing 求 ρ，验 $\tau_D + \rho = n$
解码依赖	图库对象	仅标准库实现 `graph6` 解码
比较	整数 μ	同一整数恒等式交叉核对

新词与符号

独立性	不共享某个可能出错的环节	是程度问题，不是绝对“零关联”
回归测试	已知输入必须给已知输出	防止改代码后旧功能悄悄坏掉
哈希	文件内容的数字指纹	防止输入或输出被无声替换
manifest	文件与哈希的总清单	告诉审查者“完整包应有哪些东西”

再讲精确

本项目的有限结论使用三种互补检查：

1. 主检查器直接枚举识别覆盖，得到 τ_D；
2. 另一枚举器按距离定义求最大打包 ρ，并检查 $\tau_D + \rho = n$；
3. 仅用 Python 标准库的实现自行解码 McKay 的 `graph6`，再重复两类参数计算。

补充文件 S1 v0.2 保存代码、输入计数与摘要、依赖版本、可移植输出、回归测试和 SHA–256 清单。两套目录都覆盖同一 1253 个同构类；所有路线在这些图上得到非负余量，在

$H_{2,2}$ 上得到 -1。

为什么这一步是真的

不同路线针对不同故障：若直接识别检查写错，packing 路线可能通过恒等式暴露它；若图库读取有误，标准库解码另一来源可暴露它；若文件后来被替换，哈希会变化；若软件升级改变行为，固定版本和回归测试会报警。没有任何单项保证“绝不会错”，但故障模式被分散后，证据显著更可审计。

跟着做一遍

假设把“距离至少三”误写成“距离至少二”。直接 τ_D 检查器可能仍正确，而错误 packing 检查器会得到与 $n-\tau_D$ 不同的结果，恒等式测试立即失败。反过来，若两条路线都调用同一个错误的距离函数，它们就不真正独立；因此实现依赖也要记录。

先遮住答案，自己做

半开放任务 B。补一张 2×2 交叉表：行是 atlas/McKay 两个数据源，列是“直接枚举 τ_D”与“枚举 ρ 后用 $n-\rho$”。在四个格里写应比较的共同输出；若只有 McKay 两格图数变少，第一怀疑应落在 _____，而不是立刻改数学定义。

最容易掉进去的坑

哈希相同只说明“现在看到的文件与冻结时逐字相同”，不说明文件内容本来就正确。测试全绿也只说明测试覆盖的行为符合预期，不说明文献新颖性或无限定理。把同一脚本换个文件名再跑一次，不增加算法独立性。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。判断下列哪项增加了独立性：（a）同一脚本再运行；（b）同一输入、另一参数恒等式；（c）另一数据源、同一算法；（d）只改输出颜色。

L1-2 模仿。分别写出哈希匹配和退出码 0 各自能支持的一件事、不能支持的一件事。

L2-1 迁移。为一份计算包设计三个最小回归测试：空图、四点路径、$H_{2,2}$ 各应检查什么？

L2-2 迁移。设计两个故障：（甲）只会被换数据源暴露；（乙）只会被换参数算法暴露。说明为什么“同一脚本换电脑”未必暴露它们。

L3 解释。用一句话分别说明版本号、SHA–256、manifest 和独立实现的作用边界。

核对答案与推理

半开放任务：四格都比较图数、参数摘要与负余量数；若只在 McKay 行少图，先查 McKay 输入下载、哈希和解码。

L1-1：（b）改变公式路线，（c）改变输入来源，都增加故障多样性；（a）主要检查偶发运行故障，（d）没有数学独立性。

L1-2：哈希匹配支持“字节与冻结清单相同”，不支持数学含义正确；退出码 0 支持“程序正常结束”，不支持输出结论正确。

L2-1：空图检查空边集与零阶边界约定；四点路径检查已知 $\tau_D=2$ 及补集恒等式；$H_{2,2}$

检查六个参数、映射和 $\mu = -1$。

L2-2：甲可让某目录漏一类图而算法完全正确；另一完整目录会暴露图数差。乙可让直接 checker 漏掉“trace 非空”，同一输入上的 packing 路线会与 $n - \tau_D$ 冲突。换电脑若仍用同一坏输入和同一坏代码，会原样复制错误。

L3：版本号标识发布状态；哈希标识确切字节；manifest 标识应有文件集合；独立实现通过不同代码路径降低共同错误风险。四者都不是新颖性证明。

L2-2 六层答案。

1. **结果：**数据源独立主要攻击漏图/解码；算法独立主要攻击定义实现错误。
2. **定义起点：**独立不是文件名不同，而是关键故障原因不同。
3. **合法性：**第二目录重建候选宇宙；第二参数路线从不同定义或恒等式计算同一量。
4. **易错：**两脚本共同调用同一坏函数，却被误记成“两种算法”。
5. **复核：**画数据源 × 算法四格，逐一问“这一格与哪一格只差一个因素”。
6. **评分：**两故障各 3 分，共同故障解释 2 分，四格复核 2 分。最低合格不能把“换电脑”自动当算法独立。

本卡过关门

闭卷画出“两个数据源 × 两条参数路线”的交叉矩阵，并为每一格说出它排查的故障。能明确说出“哈希不等于正确”，才可通过。**一天后再来：**判断四个新情形：换电脑主要检查环境/偶发性，不自动独立；穷举程序换随机种子通常无关；换数据源增加输入独立；换参数恒等式增加算法独立。四项理由与这四个核对键一致才通过。

对应交互审查卡：40

3.6 卡 41：计算命题的精确边界

学完本卡，你应该能做到

准确说出穷举证明了什么、没有证明什么；从“零至七阶无反例”和“八阶有反例”推出且只推出“八是最小可能阶”。

前置知识：卡 36、38、39、40。本卡是红线卡。

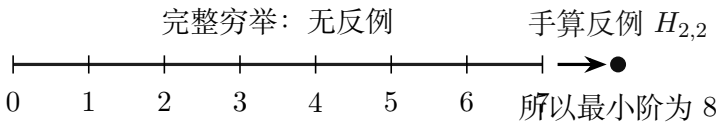
入口自测　（1）“阶最小”与“八阶唯一”是否相同？（2）有限检查能否证明任意大的 k？（3）搜索没有找到旧论文，能否证明新颖？*回退路由*：第（1）题错，回卡 36 与卡 38；第（2）题错，回卡 35 的符号图族；第（3）题错，回本篇章首的计算边界，并把“未检出先例”改写成有边界的检索陈述。

先讲人话

一把尺子量到七厘米，能告诉你七厘米以内发生什么；它不会自动延长到无穷远。计算结果必须待在自己的围栏内，不能因为看起来可靠就越界替理论定理或文献审计说话。

新词与符号

阶最小	没有更少顶点的反例，且该阶有反例	不包含同阶唯一性
唯一性	指定范围内只有一个同构类	必须检查该范围内所有同阶候选
有限命题	候选总数有限且已覆盖	可以由可审计穷举证明
无限命题	参数可任意增大	需要统一符号论证，不能靠固定截止点



再讲精确

计算机辅助命题的逻辑链只有三步：

1. 完整目录覆盖所有 $n \le 7$ 的简单图；
2. 定义级与独立检查器均发现这些图的 $\mu \ge 0$；
3. 卡 36 给出一张 $n = 8$ 且 $\mu = -1$ 的图。

故任何反例的阶至少八，而八阶反例确实存在，所以 $H_{2,2}$ 是**阶最小反例之一**，八是最小可能阶。

学术边界

该计算**不证明**：

1. $H_{2,2}$ 是唯一的八阶反例；
2. 一般图族 $H_{t,r}$ 的参数和余量公式；
3. loaded-tree 传递定理或每个固定度的 $A_\Delta = +\infty$；
4. c_Δ 的普适上界、rook 下界或极限；
5. “此前无人发表”的文献新颖性；
6. 任意更大阶数上究竟有多少反例。

正文明确只把计算用于阶最小性，也没有声称八阶唯一。

为什么这一步是真的

“没有七阶以下反例”是一个有限全称命题，完整穷举正好能覆盖。“对所有 k”“对所有 Δ”含无限多个情形，有限目录永远覆盖不完，必须靠符号证明。“没有搜到旧文献”还取决于数据库、关键词、语言和未公开工作，因此只能支持谨慎的查新记录，不能成为数学定理。

跟着做一遍

把“最小身高是 150 厘米”与“身高 150 厘米的人只有一个”比较：前者只说明没有更矮且至少有一个达到；后者还需要检查同一高度有多少人。类似地，阶最小不包含八阶同构类的唯一性。

先遮住答案，自己做

半开放任务 B。把下列声称放入“计算直接支持 / 与手算合并后支持 / 计算不支持”三栏：

$$n \le 7 \text{ 无反例}, \quad \min n = 8, \quad H_{2,2} \text{ 是唯一八阶反例}, \quad A_4 = +\infty.$$

每项只能放一栏，并写一句理由。

最容易掉进去的坑

最危险的句式是“程序已经验证了论文”。准确句式应是：“程序在两个目录和多条实现路径上支持了至多七阶无反例，因此与手算八阶证书一起证明阶最小；三个无限主定理由符号证明承担。”

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。从上面的六项“不证明”中闭卷写出任意五项。

L1-2 模仿。分别写出支持“最小阶至少八”和“最小阶至多八”的证据，再合成等号。

L2-1 迁移。若以后又穷举全部八阶图，会新增哪些结论？哪些无限结论仍不会新增？

L2-2 迁移。假设某程序完整检查了所有至多九阶的连通图且未发现除 $H_{2,2}$ 外的反例。逐项判断它能否证明：（a）所有图至多九阶只有一个反例；（b）连通八阶反例唯一；（c）$A_4 = +\infty$；（d）新颖性。

L3 解释。纠正句子：“1253 张图都通过，所以 $H_{2,2}$ 是唯一反例，而且 $A_4 = \infty$。”

核对答案与推理

半开放任务：“$n \le 7$ 无反例”由计算直接支持；“最小阶八”由计算与卡 36 手算合并支持；唯一性和 $A_4 = +\infty$ 不由该计算支持。

L1-1：应包含唯一性、参数族、loaded-tree/A_Δ、归一化极限、新颖性、较大阶分布中的至少五类。

L1-2：完整穷举给所有反例 $n \ge 8$；卡 36 给一个 $n = 8$ 反例，所以最小阶同时满足 ≥ 8 与 ≤ 8，故等于八。

L2-1：若完整检查八阶，可数出八阶反例的同构类，进而判断 $H_{2,2}$ 是否唯一八阶反例；仍不能证明任意大 k、所有固定度无界或 $\Delta \to \infty$ 的极限。

L2-2：只能支持（b），前提是输入确实覆盖所有连通八阶类且同构身份核对无误；（a）漏

了非连通图，（c）含无限多个阶，（d）是文献问题，均不能推出。
L3：正确说法是："至多七阶没有反例，$H_{2,2}$ 是一个八阶反例，所以最小阶为八；当前计算未证明八阶唯一，$A_4 = \infty$ 由 Petersen 负载树的符号公式证明。"
L2-2 六层答案。

1. **结果：**（b）可支持；（a）（c）（d）不可支持。
2. **定义起点：**先写程序输入的量词：连通、阶至多九、完整代表。
3. **合法性：**（b）完全落在输入宇宙；其余分别扩大到非连通、无限阶、外部文献宇宙。
4. **易错：**被"至多九阶"这个更大截止值迷惑，以为它也扩大了图类别或变成无限。
5. **复核：**给一个非连通十阶图或一篇未收录文献作想象反例，说明程序从未访问这些对象。
6. **评分：**四项判断各 1 分，三个量词边界各 2 分。最低合格必须明确"连通有限穷举不证明无限或新颖性"。

本卡过关门

在不看边界框的情况下，先用三句话完整推出"最小阶八"，再列出五项计算不能证明的内容。**24 小时后不同题面：**给定"已完整检查所有至多九阶的连通图；八阶有两类反例，九阶有五类"，分别写出它能支持的四个有限结论，并说明为何仍不能推出非连通情形、$A_4 = +\infty$ 或新颖性。核对键：只能谈连通图；可数八/九阶类并给连通最小阶八；三个越界结论均不得写。任一越界即撤销通过。
七天后红线复测（独立题面）：假设一个经过双路线交叉核验的程序检查了所有至多八阶简单图：七阶以前无负余量，八阶恰有三类负余量图。另有一个手算八阶见证。写出它能证明和不能证明的各三项。**自校验键：**能证明：存在八阶反例；最小阶为八；八阶反例恰有三个同构类。不能证明：任意固定度 gap 无界；某构造的无限族定理；文献中此前绝无同样结果。程序/输入正确性仍由交叉证据承担，不能由"跑完"三个字替代。

对应交互审查卡：41（红线）

附录 A　公式地图：每一条等式从哪里来

这张地图不是背诵清单。左栏是结论，中栏是最短证据链，右栏是最容易犯的错误。若看见公式却说不出中栏，就回到相应卡片。

公式或结论	证据链	红线错误
$\tau_D(G)+\rho(G)=n$	卡 04、05 的补集双向对应，再把最小大小变为补集的最大大小	只证明一个方向
$\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(G) = [\Delta(\Delta-1)n+2m]/(\Delta^2+1)$	Henning–Yeo 原猜想；Δ 是实际最大度	用任意度上界代入
$\mu=\Delta(\Delta-1)n+2m-(\Delta^2+1)\tau_D$	清正分母；$\mu<0$ 恰为反例	把正负号说反
$\mu=(\Delta^2+1)\rho-[(\Delta+1)n-2m]$	代 $\tau_D=n-\rho$，再用握手引理	移项漏符号
$H_{t,r}$ 的 $n=t+2r+2$	数 a,b,X,C,D 五类顶点	漏掉 a,b
$H_{t,r}$ 的 $m=2t+3r+\binom{r}{2}$	X 两边、每条 $C-D$ 路三边、D 团	团边重复计数
$\Delta(H_{t,r})=t+r$	列五类度数并证明 a,b 达到	只给上界
$\mu(H_{t,r})=-(t-1)(r-1)$	卡 15 从 deficit 式逐行化简	“整理可得”
loaded-tree：$n=qk$、$m=rqk/2+k-1$	k 个正则纤维加树的 $k-1$ 桥	quotient 非树仍套用
$\Delta=r+L$	每点度 $r+\lambda$，最大 load 实际达到 L	“至多”偷换成“等于”
$\rho=k$	每纤维至多一；unused selector 每纤维至少一	漏掉任一方向
$\mu=k((r+L)^2+3-(L+1)q)-2$	代 n,m,ρ,Δ；追踪 $2(k-1)$	漏掉常数 -2
$A_\Delta=+\infty$，$\Delta\geq 4$	Petersen 分别处理四、五；H-chain 处理六以上	与 c_Δ 混同
$H_{2,2}$：$119>118$	$n=8,m=11,\Delta=4,\tau_D=7$	把计算最小性说成唯一性
$\rho(G)=\alpha(G^2)$	距离至少三等价于平方图中不相邻	忽略双向
$\rho/n\geq(1+\Delta\bar{d})^{-1}$	Caro–Wei、AM–HM、charging、度平方	取倒数方向错
c_Δ 通用上界	packing 下界代入带负系数的 gap，再优化平均度	负系数方向错

公式或结论	证据链	红线错误
rook：$q = s^2, r = 2(s-1), \mathrm{diam} = 2$	棋盘坐标逐项证明	行列邻点重复
$s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor$、$L = \Delta - 2s + 2$	卡 52 证明 $s \geq 4, L \geq 2$	只试数值
$c_\Delta \geq \phi_\Delta$	对每个有限大 k 有合法图；用 supremum 接住极限	虚构无限图
$1 - \Delta\phi_\Delta$ 精确两项式	卡 58 通分	漏 +1 或负号
$c_\Delta \geq \Delta^{-1} - 6\Delta^{-4/3}$	卡 59 分别压两项误差	floor 方向错
$\lim \Delta c_\Delta = 1$	下界给 liminf，通用上界给 limsup，再夹逼	声称完整二阶项

三条主证明路线

1. **反例路线：** 定义 → 补集引理 → margin → $H_{t,r}$ → 全 $\Delta \geq 4$ 有反例。
2. **固定度放大路线：** loaded tree → packing 精确值 → margin 斜率 → Petersen 四、五度 + 高次链 → $A_\Delta = \infty$。
3. **归一化极限路线：** G^2/Caro–Wei 上界 → rook fibres 下界 → supremum → 精确误差 → squeeze。

附录 B　本册总门、错题与延迟复测记录

学完本卡，你应该能做到

本记录只覆盖本册：卡 18–41。勾选不是掌握证据；必须留下闭卷答案、错因和延迟复测日期。本册红线卡为：21、23、25、29、31、33、35、41。

本册总门

- ☐ 1. 所有入口诊断均按逐题失败路由处理，没有带错闯关。
- ☐ 2. 每卡至少完成一个完整例 A、一个半开放例 B、L1/L2/L3 和六层答案复核。
- ☐ 3. 我能闭卷重建本册主证明链，并指出每一步依赖的定义或前卡。
- ☐ 4. 红线卡已在首次学习、24 小时后和 7 天后各通过一次。
- ☐ 5. 我能把“已证明、计算支持、文献未检出、仍待确认”分开陈述。

错题记录

日期	卡/题	我的原错答	精确错因与失败路由	换题复核结果

日期	卡/题	我的原错答	精确错因与失败路由	换题复核结果

一天后与七天后复测

卡号	首次通过	24 小时题/日期	24 小时结果	7 天题/日期	7 天结果与错因

记录版本：_____ 记录人：_____ 最终确认日期：_____

附录 C　零基础中英术语与符号表

符号/英文	中文	读法	精确用途
$G=(V,E)$	图	图 G	V 是顶点集合，E 是边集合
null graph	空图	null graph	$V=\varnothing$；没有顶点也没有边，本书约定 $\Delta=0$
edgeless graph	无边图	edgeless graph	可以有一个或多个顶点，但 $E=\varnothing$；不得与空图混称
n,m	阶、边数	恩、艾姆	$n=\lvert V\rvert, m=\lvert E\rvert$
$d_G(v)$	顶点度数	v 的度	与 v 相连的边数
$\Delta(G)$	实际最大度	德尔塔	全部顶点度数最大值
$\mathrm{dist}_G(u,v)$	距离	distance	最短路边数；不同分量为 $+\infty$
diameter	直径	diameter	连通图中最大点对距离
trace $e\cap T$	边的指纹/迹	交集	边在选点集合上留下的端点
identifying vertex cover	识别顶点覆盖	IVC	覆盖每边且不同边 trace 不同
$\tau_D(G)$	识别顶点覆盖数	tau 下标 D	IVC 的最小大小
packing	packing/距离打包	packing	任意两点距离至少三
$\rho(G)$	packing 数	rho	packing 最大大小
$\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}(G)$	猜想右端	B 下标 H-Y	Henning–Yeo 上界表达式
$\mu(G)$	整数余量	mu	清分母后的右边减左边；负为反例
additive gap	加性缺口	gap	$\tau_D-\mathsf{B}_{\mathrm{HY}}=-\mu/(\Delta^2+1)$
deficit	增广度亏损	deficit	$\Delta+1-d(v)$
fibre	纤维/块副本	fibre	loaded-tree 中的一份基图
port	端口	port	承接一条外部桥的纤维顶点
load λ	负载	lambda	同一点承接的桥 incidence 数
selector	选择点	selector	未被端口使用、用于 packing 的点
rooted product	根积	rooted product	每纤维同一根承接 quotient 边
A_Δ	固定度总缺口上确界	A 德尔塔	不除顶点数；可为无穷
c_Δ	固定度人均缺口上确界	c 德尔塔	gap 除以阶后的 supremum
G^2	平方图	G squared	原图距离至多二的点在此相邻
$\alpha(G)$	独立数	alpha	最大独立集大小
$\bar{d}$	平均度	d bar	$2m/n$
Caro–Wei	独立集下界	卡罗–魏	由随机排序得到 $\sum 1/(d+1)$

符号/英文	中文	读法	精确用途
charging	记账/注入论证	charging	把对象分配到互异 incidence 以计数
R_s	rook graph	rook graph	$s \times s$ 棋盘同行或同列相邻
$\lfloor x \rfloor$	向下取整	floor	不超过 x 的最大整数
ϕ_Δ	rook 极限下界	phi	固定 Δ、$k \to \infty$ 的人均值
sup	上确界	supremum	最小共同上界，不必取到
$\liminf, \limsup$	下极限、上极限	limit inferior/superior	尾部最低/最高极限水平
$f \sim g$	首阶渐近相等	asymptotic	$f/g \to 1$
$O(\cdot)$	量级上界	big O	绝对值最终不超过常数倍
provenance	来源沿革	provenance	对象、数据或文件的可追溯来源
novelty audit	查新审计	novelty audit	记录检索范围和近先例，不证明全球首次
SHA-256	文件哈希	SHA two five six	内容指纹，用于检测版本漂移

附录 D　68 卡最终掌握清单

这份纸面清单只用于定位学习进度；正式状态以交互文件中的本人答案、证据、确认时间和版本匹配为准。不要在尚未闭卷完成时预先打勾。

A. 定义、范围与符号（01–09）

- ☐ 1. 研究对象和边界约定；
- ☐ 2. IVC 定义；
- ☐ 3. packing 定义；
- ☐ 4. 补集引理正向；
- ☐ 5. 补集引理反向；
- ☐ 6. $\tau_D + \rho = n$；
- ☐ 7. 实际最大度；
- ☐ 8. margin/gap 符号；
- ☐ 9. deficit reformulation。

B. $H_{t,r}$（10–17）

- ☐ 10. 构造；
- ☐ 11. 阶与边数；
- ☐ 12. 各类度数；
- ☐ 13. 直径穷尽；
- ☐ 14. ρ, τ_D；
- ☐ 15. margin；
- ☐ 16. 全 $\Delta \geq 4$；
- ☐ 17. 对角极限。

C. loaded tree（18–27）

- [ ] 18. 全部数据；
- [ ] 19. 全部假设；
- [ ] 20. 简单连通及 n, m；
- [ ] 21. 实际最大度；
- [ ] 22. packing 上界；
- [ ] 23. selector 下界；
- [ ] 24. ρ, τ_D；
- [ ] 25. margin；
- [ ] 26. 斜率阈值；
- [ ] 27. 适用边界。

D. 固定度无界（28–35）

- [ ] 28. Petersen 参数；
- [ ] 29. $\Delta = 4$ 端口和 k；
- [ ] 30. $P_{4,k}$ 参数；
- [ ] 31. $\Delta = 5$ 同根和 k；
- [ ] 32. $P_{5,k}$ 参数；
- [ ] 33. 高次数实际最大度；
- [ ] 34. 高次数 packing/margin；
- [ ] 35. $A_\Delta = \infty$。

E. 计算最小性（36–41）

- [ ] 36. $H_{2,2}$ 手算；
- [ ] 37. graph6/同构/provenance；
- [ ] 38. 枚举宇宙；
- [ ] 39. 主 checker；
- [ ] 40. 独立 checker；
- [ ] 41. 计算边界。

F. 通用上界（42–50）

- [ ] 42. c_Δ 与 A_Δ；
- [ ] 43. 既有通用估计；
- [ ] 44. 平方图；
- [ ] 45. Caro–Wei；
- [ ] 46. charging；
- [ ] 47. 求和换序；
- [ ] 48. packing 密度；
- [ ] 49. 负系数代入；
- [ ] 50. 优化与 limsup。

G. rook 与精确首阶（51–60）

- [ ] 51. rook 参数；
- [ ] 52. floor 边界；
- [ ] 53. 任意大精确度树；
- [ ] 54. rooted rook 最大度；
- [ ] 55. packing 与 τ_D；
- [ ] 56. 有限 k 与 ϕ；
- [ ] 57. supremum；
- [ ] 58. 精确误差；
- [ ] 59. 显式误差界；
- [ ] 60. squeeze 与开放边界。

H. 文献与责任（61–68）

- [ ] 61. 原问题归属/同名辨析；
- [ ] 62. 邻近参数；
- [ ] 63. 构造与 packing 先例；
- [ ] 64. 最小图 provenance/新颖性；

- ☐ 65. supplement；
- ☐ 66. 署名行政事实；
- ☐ 67. AI 披露与能力门；
- ☐ 68. 双语、版本与外发授权。

学术边界

所有 68 项均需在对应卡完成独立作答；28 张红线卡还需延迟复测。纸面勾选、完成率或 AI 的评价均不能替代本人证据与正式口试。