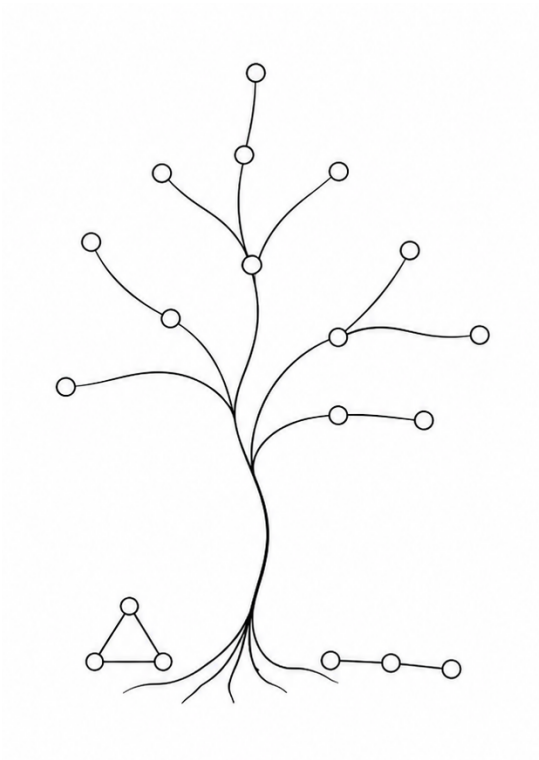


从点和线到一个猜想的终结

普适上界与精确首阶渐近

第三册 · 卡 42-60



PROJECT π Orchard 内部学习版

从平方图和有限平均走到 rook 纤维与 $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_{\Delta} = 1$

2026 年 8 月 19 日 · A4 黑白双面印刷版

本册导航

学完本卡，你应该能做到

本册覆盖卡 42–60。学完并通过本册总门后，你应当能够：重建 Caro–Wei 上界、charging 不等式、rook 下界和最终挤压。

再讲精确

开始前请确认：能闭卷复述卡 09、21–25、35，并通过 Z09–Z13 的入口题。若其中一项不能闭卷完成，请先按卡号返回相应前册复习；不要只凭“看着眼熟”跳过。

跨册引用一律使用卡号和概念名，不依赖另一册的页码。因此，不同印次或不同装订方式不会破坏学习路线。

目录

本册导航	ii
第一部分 最坏能错多严重：普适上界	1
第一章 第六篇：平方图与普适上界	2
1.1 卡 42: c_Δ 的图类、归一化与 A_Δ 的区别	2
1.2 卡 43: Henning–Yeo 的既有通用估计	5
1.3 卡 44: 平方图把 packing 变成独立集	8
1.4 卡 45: Caro–Wei: 从有限排列的平均得到独立集	10
1.5 卡 46: Charging: 给两步可达点分配不同收据	13
1.6 卡 47: 求和换序与度数平方	16
1.7 卡 48: packing 密度的普适下界	19
1.8 卡 49: 把 packing 下界代入 gap: 负系数决定方向	21
1.9 卡 50: 平均度优化、上确界与 $\limsup$	24
第二部分 rook 下界与精确首阶渐近	29
第二章 用棋盘积木逼近真正的最坏情况	30
2.1 卡 51: rook graph: 把国际象棋车的走法变成图	30
2.2 卡 52: 为什么选择 $s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor$	34
2.3 卡 53: 怎样造任意大的、最大度恰为 L 的树	37
2.4 卡 54: 把树根插进棋盘: 实际最大度为什么正好是 Δ	40
2.5 卡 55: 每块恰选一个: $\rho = k$ 与 $\tau_D = (s^2 - 1)k$	43
2.6 卡 56: 从有限图算出归一化缺口 ϕ_Δ	46
2.7 卡 57: 上确界可以接住极限, 却不要求取到极限	50
2.8 卡 58: 精确误差恒等式: 先精确, 再估计	53
2.9 卡 59: 把误差压到 $6\Delta^{-1/3}$ 以下	56
2.10 卡 60: 夹逼得到精确首阶常数, 而不是完整答案	60

第七篇混合测验	64
附录 A 公式地图：每一条等式从哪里来	65
附录 B 本册总门、错题与延迟复测记录	67
附录 C 零基础中英术语与符号表	69
附录 D 68 卡最终掌握清单	71

第一部分

最坏能错多严重：普适上界

第一章 第六篇：平方图与普适上界

前几篇不断造出越来越严重的反例。本篇换一个方向：不管图怎样构造，单位顶点的违反量究竟最多能多大？路线是

packing $\longleftrightarrow$ 平方图独立集 $\longrightarrow$ 有限排列平均 $\longrightarrow$ 度数估计 $\longrightarrow$ 一元不等式优化.

每个箭头都会单独证明。你不需要预先会概率、微积分或上确界；相应语言会在用到时重新解释。

本篇人口规则：每张卡的三道入口题必须全部答对才可继续；任一题错误，必须按该卡给出的回退路由复习后重新作答，不能带错进入正文。

1.1 卡 42： c_Δ 的图类、归一化与 A_Δ 的区别

学完本卡，你应该能做到

逐字写出 c_Δ 的定义，解释“有限、连通、实际最大度恰为 Δ 、单位顶点差、上确界”五个限制；用一个线性例子说明 $A_\Delta = +\infty$ 不迫使 $c_\Delta = +\infty$ 。

前置知识：卡 07、35；零基础预备课中的分数、最大值与上确界。本卡是红线卡。

人口自测 (1) “最大度等于 Δ ”与“最大度不超过 Δ ”相同吗？(2) 总利润与每件商品利润相同吗？(3) 上确界为什么可以不被某个对象取到？回退路由：第 (1) 题错，回卡 07；第 (2) 题错，回卡 35 的总 gap 与本卡目标中的归一化；第 (3) 题错，回零基础预备篇“上确界”。

先讲人话

A_Δ 像问“一家越来越大的工厂总共多赚多少”； c_Δ 像问“平均到每件产品多赚多少”。总额可以随规模无限增长，而每件只稳定多赚一角钱。

新词与符号

A_Δ	固定度下总加性差的上确界	不除以顶点数
c_Δ	固定度下单位顶点差的上确界	先把 gap 除以 n
sup	读作“上确界”	所有值的最小共同上界，不必取到
归一化	除以规模 n	让不同大小的图可以按“人均”比较

A_Δ 总 gap 仪表: $g(G)$	除以顶点数 n	c_Δ 人均仪表: $g(G)/ V(G) $
--------------------------------	-----------	-----------------------------------

再讲精确

对每个整数 $\Delta \geq 4$, 令

$$g(G) = \tau_D(G) - B_{HY}(G).$$

两种极值量为

$$A_\Delta = \sup\{g(G) : G \text{ 有限、连通且 } \Delta(G) = \Delta\},$$

$$c_\Delta = \sup\left\{\frac{g(G)}{|V(G)|} : G \text{ 有限、连通且 } \Delta(G) = \Delta\right\}.$$

条件是 $\Delta(G) = \Delta$, 不是 $\Delta(G) \leq \Delta$. 每个候选 G 仍是一张有限图; $\sup$ 允许考察无限多张有限图所得数值的共同上界。

为什么这一步是真的

若一族图满足 $|V(G_k)| = 10k$, $g(G_k) = k$, 则总 gap 随 k 无界, 所以这族足以推出 $A_\Delta = +\infty$; 但

$$\frac{g(G_k)}{|V(G_k)|} = \frac{k}{10k} = \frac{1}{10}$$

始终有限。总量无界只说明分子长大; 归一化后分母也在长大, 二者可能抵消。因此卡 35 不能直接替代本篇。

跟着做一遍

数列 $1 - 1/k$ 的各项都小于一, 却能无限接近一。它的上确界是一, 但没有一项等于一。同样, c_Δ 可能由一系列越来越大的有限图逼近, 而没有一张图真正达到它。切勿虚构 “ $k = \infty$ 的图”。

先遮住答案, 自己做

半开放任务 B. 一系列候选图给 $n_k = 4k$, $g_k = k + 1$. 补完: 总 gap _____; 单位 gap 为 _____, 趋于 _____. 由这一个子族只能推出 $c_\Delta \geq$ _____, 不能推出等号。

最容易掉进去的坑

- 把 $\sup$ 写成 $\max$: 前者不承诺存在极值图。
- 把 “最大度恰为 Δ ” 放宽为 “不超过 Δ ”: 改变了候选集合。
- 忘记连通与有限: 改变论文正在研究的图类。
- 从 $A_\Delta = \infty$ 推出 $c_\Delta = \infty$: 忽略了除以 n 。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿. 若 $n_k = 7k$, $g_k = 3k + 2$, 分别判断总 gap 与单位 gap 的行为。

L1-2 模仿. 求集合 $\{2 - 1/k : k \geq 1\}$ 的 supremum, 并判断是否有 maximum。

L2-1 迁移. 给出一列正数, 使总量无界但除以 n_k 后趋于零。

L2-2 迁移。某张图有限、连通，实际最大度为 4，单位 gap 为 0.02。它能否直接作为 c_5 的候选？若把定义误写为“最大度至多五”，候选集发生了什么变化？

L3 解释。逐字纠正：“ c_5 是所有最大度至多五的图中由某张最大图取得的总差。”

核对答案与推理

半开放任务：总 gap 无界；单位 $\text{gap} = 1/4 + 1/(4k) \rightarrow 1/4$ ；故只能推出 $c_\Delta \geq 1/4$ 。

L1-1： $g_k \rightarrow \infty$ ，而 $g_k/n_k = 3/7 + 2/(7k) \rightarrow 3/7$ 。

L1-2：上确界为 2，但每项都小于 2，所以没有 maximum。

L2-1：例如 $n_k = k^2, g_k = k$ ；总差趋于无穷，人均差 $1/k \rightarrow 0$ 。

L2-2：不能； c_5 只允许实际最大度恰为五。改成“至多五”会额外纳入最大度 0, 1, 2, 3, 4 的图，定义了另一个极值问题。

L3： c_5 是有限连通且实际最大度恰为五的图中，单位顶点加性差 $g(G)/|V(G)|$ 的上确界；不保证某张图取到。

L2-2 六层答案。

1. **结果：**该图不是 c_5 候选；“至多五”会扩大候选集。
2. **定义起点：** c_Δ 的花括号中写的是 $\Delta(G) = \Delta$ 。
3. **合法性：** $4 \neq 5$ ，所以这张图不满足候选谓词；数值 gap 多好都不能补救资格失败。
4. **易错：**日常语言把“最大度五”误听成“最大度不超过五”。
5. **复核：**把图的最大度字段代入等式检查： $\Delta(G) = 4$ ，而要求为 5，立即为假。
6. **评分：**候选判断 2 分，定义 2 分，新增度数类别 3 分，解释为何数值无关 3 分。最低合格必须说“恰为五”。

本卡过关门

闭卷写出两个定义，并在 90 秒内讲清“总量无界、人均有限、上确界未必取到、最大度必须恰等”四点。**24 小时后不同数据：**取 $n_k = 5k, g_k = 2k + 1$ 。核对键： $g_k \rightarrow \infty$ ， $g_k/n_k = 2/5 + 1/(5k) \rightarrow 2/5$ ；该子列只给相应 $c_\Delta \geq 2/5$ ，不保证取到或等号。四点全对才通过。

七天后红线复测（独立题面）：某个固定实际最大度的有限连通图族满足 $n_k = 12k, g_k = 3k + 2$ 。分别判断它对 A_Δ 与 c_Δ 能推出什么，不能推出什么。**自校验键：** $g_k \rightarrow \infty$ ，故 $A_\Delta = +\infty$ ； $g_k/n_k = 1/4 + 1/(6k) \rightarrow 1/4$ ，该族只给 c_Δ 的下界信息，不能证明 $c_\Delta = 1/4$ 、不能证明上确界由本族取到，也不能把总量无界写成人均无界。

1.2 卡 43: Henning–Yeo 的既有通用估计

学完本卡，你应该能做到

从前人定理正确写出一个较粗的单位 gap 上界，推出一阶常数不超过一；明确该道路的学术归属，并说出为何还要保留后面的平方图论证。

前置知识：卡 42；本卡会重讲平均度和“来源支持什么”。

人口自测 (1) 平均度怎样由 n, m 算？(2) 若 $0 \leq \bar{d} \leq \Delta$ ，则 $\Delta - \bar{d}$ 至多多少？(3) 引用前人定理后得到的直接推论能否冒充全新起点？回退路由：第 (1) 题错，回卡 01 的握手引理；第 (2) 题错，回零基础预备篇“区间与减法”；第 (3) 题错，回卡 42 的证据边界并重读本卡依赖中的来源说明。

先讲人话

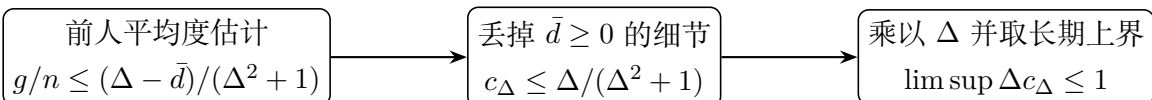
去山顶已有一条宽而缓的旧路，足以告诉我们山顶不会高过某个数量级；后面修一条更陡、更精确的新路，是为了得到每个有限 Δ 的更紧上界。旧路仍应标明修路人。

新词与符号

平均度记作 $\bar{d}$ ，横线读作“平均”。把所有顶点度数相加再除以顶点数：

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{2m}{n}.$$

最后一个等号来自握手引理。因为每个度数介于零与 Δ 之间，平均数也满足 $0 \leq \bar{d} \leq \Delta$ 。这里“一阶常数不超过一”的意思是：把预计约为 $1/\Delta$ 的量乘回 Δ 后，其长期上方界不超过一。



再讲精确

可审计的 claim–source 定位。Henning–Yeo (2012) 的 Theorem 7，论文印刷页第 4 页，证明了

$$\tau_D(G) \leq \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + 1} |V(G)|.$$

原始载体为 *The Electronic Journal of Combinatorics* 19(4), Paper P32, DOI: 10.37236/2114。证据等级为**已核原始期刊 PDF 的定理号、印刷页与公式**，不是二手综述。把该定理减去 $B_{HY}(G)$ 并使用 $2m/n = \bar{d}$ ，才得到本卡所用的直接推论

$$\frac{\tau_D(G) - B_{HY}(G)}{|V(G)|} \leq \frac{\Delta - \bar{d}}{\Delta^2 + 1} \leq \frac{\Delta}{\Delta^2 + 1}.$$

第二个不等号只用到 $\bar{d} \geq 0$ 。对定义中的每一张图都成立，所以取上确界仍有

$$c_{\Delta} \leq \frac{\Delta}{\Delta^2 + 1}.$$

乘以 Δ :

$$\Delta c_{\Delta} \leq \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + 1} < 1,$$

从而 $\limsup_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_{\Delta} \leq 1$ 。

为什么这一步是真的

“逐图成立”如何传到上确界？若候选集合中的每个数都不超过同一个数 U ，那么 U 就是共同上界；最小共同上界自然也不超过 U 。这里 $U = \Delta/(\Delta^2 + 1)$ 。

“ $\limsup \leq 1$ ”可先读成：当 Δ 越来越大， Δc_{Δ} 的长期上方极限不超过一。因为右边 $\Delta^2/(\Delta^2 + 1)$ 趋近一，夹在它下方的数列不可能长期越过一。

跟着做一遍

取 $\Delta = 4, \bar{d} = 3$ ，旧估计给

$$\frac{g(G)}{n} \leq \frac{4-3}{17} = \frac{1}{17}.$$

若只使用更粗的 $\bar{d} \geq 0$ ，则得到 $4/17$ 。因为 $1/17 < 4/17$ ，保留平均度信息给出的上界更小、因而更强；下一组卡还会利用平方图得到对给定 $\bar{d}$ 更精细的非线性项。

跟着做一遍

半开放例 B（先补证据链）。下面的 claim-source 记录缺了两格：

$$\boxed{\text{原文定理：}\rule{1.5cm}{0.4pt}, \text{印刷页：}\rule{1.5cm}{0.4pt}} \implies \boxed{\tau_D/n \leq \Delta^2/(\Delta^2 + 1)}.$$

请补格，再自行写出“减去 B_{HY}/n ”后的分子。若只写作者名而没有定理号与页码，返回正式框重新核对；若把直接推论写成原文逐字结论，返回边界框。

学术边界

这一一阶上界常数来自 Henning-Yeo 的既有定理。本稿可以说明它如何推出当前记号下的结论，却不能把“ $\limsup \leq 1$ 的粗道路”宣称为本文首创。后面的平方图证明给出更强的有限度数上界；其价值是量化改进和与下界构造精确对接。

最容易掉进去的坑

平均度不是最大度；非正则图中通常严格小于 Δ 。引用时只写“由已知结果”而不给作者、定理位置和所支持的公式，会使归属不可审计。反过来，前人给了粗上界，也不等于后面的严格改进没有价值。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。取 $\Delta = 5, \bar{d} = 2$ ，计算两层上界。

L1-2 再算。取 $\Delta = 6, \bar{d} = 4$ ，计算保留平均度与丢掉平均度的两层上界。

L2-1 迁移。证明 $\Delta^2/(\Delta^2 + 1) \rightarrow 1$ ，但每一项都小于一。

L2-2 证据审计。写出从原文 Theorem 7 到 $(\Delta - \bar{d})/(\Delta^2 + 1)$ 的逐行代数；标出哪一行是原文、哪一行是本卡推论。

L3 解释。写一条 claim-source 记录：哪一个结论来自前人，哪一个有限度数改进将在本篇证明？

核对答案与推理

半开放例 B：Theorem 7，第 4 页；减去后分子为 $\Delta - \bar{d}$ 。

L1-1：保留平均度得 $(5 - 2)/26 = 3/26$ ；只用非负性得 $5/26$ 。

L1-2：保留平均度为 $(6 - 4)/37 = 2/37$ ；粗界为 $6/37$ 。

L2-1： $\Delta^2/(\Delta^2 + 1) = 1 - 1/(\Delta^2 + 1)$ ；被减项为正且趋于零。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** $g/n \leq (\Delta - \bar{d})/(\Delta^2 + 1)$ 。
2. **定义起点：** $g = \tau_D - B_{HY}$ ，且 $B_{HY}/n = [\Delta(\Delta - 1) + \bar{d}]/(\Delta^2 + 1)$ 。
3. **合法性：**原文 Theorem 7 给 $\tau_D/n \leq \Delta^2/(\Delta^2 + 1)$ ；两边减同一个 B_{HY}/n 不改方向。
4. **易错：**原文没有逐字写出平均度 gap 式；它是由原定理推出的代数推论。
5. **复核：**分子 $\Delta^2 - [\Delta(\Delta - 1) + \bar{d}] = \Delta - \bar{d}$ 。
6. **评分：**原文定理与页码 2 分，定义 2 分，减式 2 分，化简 2 分，归属边界 2 分。最低合格必须区分“原文定理”和“本卡推论”。

L3：“Henning-Yeo 的 Theorem 7 给出 $\tau_D/n \leq \Delta^2/(\Delta^2 + 1)$ ；它在当前记号下蕴含 $g/n \leq (\Delta - \bar{d})/(\Delta^2 + 1)$ 及粗一阶常数；本篇平方图、Caro-Wei 与 charging 链给出命题中的更强有限 Δ 上界。”

本卡过关门

闭卷写出旧估计、平均度定义和 $\limsup \leq 1$ 的三行推导，并主动说出归属。若把平方图有限界或前人粗界的贡献主体说反，本卡不通过。**一天后不同题面：**只给原文结论 $\tau_D/n \leq 25/26$ 以及 $\Delta = 5, \bar{d} = 3$ ，自行恢复 B_{HY}/n 并算 gap。核对键： $B_{HY}/n = (20 + 3)/26 = 23/26$ ，故 $g/n \leq 2/26 = 1/13$ ；必须说明前一式来自 Theorem 7，后一式是代数推论。

对应交互审查卡：43

1.3 卡 44：平方图把 packing 变成独立集

学完本卡，你应该能做到

从任意图 G 画出平方图 G^2 ；从两个方向证明 G 的 packing 恰是 G^2 的独立集，因而 $\rho(G) = \alpha(G^2)$ ；正确处理不同连通分量。

前置知识：卡 01、03；本卡重讲距离与独立集。

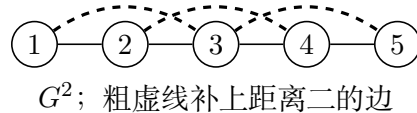
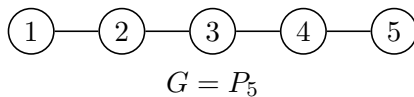
人口自测 (1) packing 中两点最少相距几条边？(2) 独立集禁止什么？(3) 不同分量的距离约定为什么？
 回退路由：第 (1) 题错，回卡 03；第 (2) 题错，回零基础预备篇“独立集”；第 (3) 题错，回卡 05 的孤立点例与距离 $+\infty$ 约定。

先讲人话

在原图中，两名侦察员不能离得一格或两格。我们把“走一格或两格就能碰到”全部画成平方图中的直接边。这样，“侦察员之间不能有这种边”就变成最普通的独立集规则。

新词与符号

G^2	读作“ G 的平方图”	顶点不变，原图距离一或二的不同点在平方图相邻
独立集	内部没有边的顶点集合	任意两点在该图中不相邻
$\alpha(H)$	图 H 的独立数	独立集的最大大小



再讲精确

平方图定义为

$$V(G^2) = V(G), \quad uv \in E(G^2) \iff 1 \leq \text{dist}_G(u, v) \leq 2.$$

若 S 是 G 的 packing，则 S 中不同点距离至少三，所以它们在 G^2 中不相邻， S 是独立集。反之，若 S 在 G^2 中独立，则任意不同 $u, v \in S$ 都不是原图距离一或二；它们要么距离至少三，要么位于不同分量、距离 $+\infty$ 。两种都满足 packing 定义。因此可行集合完全相同，最大大小也相同：

$$\rho(G) = \alpha(G^2).$$

为什么这一步是真的

等号证明必须有两个方向。“packing $\Rightarrow$ 独立集”只给 $\rho(G) \leq \alpha(G^2)$ ；“独立集 $\Rightarrow$ packing”给反向不等式。两边合起来，才说明不是近似关系而是同一批集合换了一种语言。

跟着做一遍

在 P_5 中, $\{1, 4\}$ 的距离为三, 是 packing; 平方图中 1 只与 2、3 相邻, 所以 1 与 4 没有边, 是独立集。 $\{1, 3\}$ 在原图距离二, 不是 packing; 平方图新增边 13, 也不是独立集。

跟着做一遍

半开放例 B. 改用四点路径 $P_4 = 1 - 2 - 3 - 4$ 。在 P_4^2 中先保留三条原边, 再补出全部距离二边; 最后判断 $\{1, 4\}$ 是否独立, 并用原图距离复核。若把距离三也连边, 返回平方图定义; 若只画对却说不出原图距离, 返回正式框的双向条件。

最容易掉进去的坑

G^2 不是把边数平方, 也不是把每条边复制两次。它只补上“最短路长度恰为二”的点对。不同分量距离为 $+\infty$, 不会在平方图中突然连接。

先遮住答案, 自己做

L1-1 模仿。 画四点路径 P_4 的平方图, 列出新增边。

L1-2 再认。 说明为什么 $K_{1,3}^2 = K_4$ 。

L2-1 迁移。 求六点循环 C_6 的一个最大 packing, 并在 C_6^2 中解释。

L2-2 分量边界。 取 $G = P_3 \sqcup K_1$ 。写出跨分量距离约定, 画出 G^2 , 并分别用两种语言求最大值。

L3 证明。 不用“显然”二字, 闭卷写出 $\rho(G) = \alpha(G^2)$ 的两个方向, 并包含不同分量情形。

核对答案与推理

半开放例 B: P_4^2 在原边 12, 23, 34 之外新增 13, 24。原图中 $\text{dist}(1, 4) = 3$, 所以平方图中 1, 4 不相邻, $\{1, 4\}$ 是独立集。

L1-1: 原边 12, 23, 34, 新增距离二边 13, 24。

L1-2: 星的任意两片叶距离二, 平方后互相相邻; 中心本来与所有叶相邻, 所以四点两两相邻。

L2-1: 例如 $\{1, 4\}$, 两点距离三; 不能取三个点, 因为六点围成一圈, 每个被选点前后两格都被排除。平方图中 1 与 2、3、5、6 相邻, 只与 4 不相邻, 所以最大独立集大小二。

L2-2 六层答案。

1. **结果:** $G^2 = P_3^2 \sqcup K_1 = K_3 \sqcup K_1$, 且 $\rho(G) = \alpha(G^2) = 2$ 。
2. **定义起点:** 同分量用最短路距离, 跨分量距离记为 $+\infty$; 平方图只连距离一或二的点。
3. **合法性:** 孤立点与路径中任何点距离 $+\infty \geq 3$, 可与路径中一个点同时选。
4. **易错:** 不能把不同分量“画得近”当成距离小; 图距离只沿边计算。
5. **复核:** $P_3^2 = K_3$ 最多选一, 再加孤立点恰好二; 原图每个分量也各最多选一。
6. **评分:** 距离约定 2 分, 平方图 2 分, 两种可行性 2 分, 上界 2 分, 等号 2 分。最低合格必须出现 $+\infty$ 。

L3: 正向用“距离至少三排除平方边”; 反向用“没有平方边排除距离一、二”, 剩余有限

距离至少三或 $+\infty$ 。故两个最大化问题的可行集合相同，最优值相同。

本卡过关门

随机画一张五点图，先求距离表，再画平方图；选一个集合同时用 packing 语言与独立语言判定。最后闭卷写双向证明。一天后再来：画 P_6^2 ，并在不引用本卡原例的情况下重建等式。核对键： $\rho(P_6) = \alpha(P_6^2) = 2$ ；例如 $\{1, 4\}$ 可行，而任意三个所需的相邻间隔总和至少六、在只有五条路径边时放不下。

对应交互审查卡：44

1.4 卡 45：Caro–Wei：从有限排列的平均得到独立集

学完本卡，你应该能做到

不依赖抽象概率论，从有限个顶点排列中构造独立集；证明某点被选中的比例为 $1/(d+1)$ ；用普通平均推出

$$\alpha(H) \geq \sum_v \frac{1}{d_H(v) + 1} \geq \frac{n^2}{n + \sum_v d_H(v)}.$$

前置知识：卡 44；零基础预备课中的有限平均、分数和求和。

人口自测 (1) 三个不同物体共有多少种排列？(2) 一组数的平均值是否每项都达到？(3) 独立集为何不能含相邻两点？**回退路由**：第 (1) 题错，回零基础预备篇“有限排列”；第 (2) 题错，回“有限平均”；第 (3) 题错，回卡 44 的独立集定义。

先讲人话

让所有顶点排队。一个顶点若比自己所有邻居都更早到，就发给它一枚徽章。相邻两点不可能同时都说“我比对方早”，所以拿徽章的点自动组成独立集。我们把所有排队次序都试一遍，再算平均徽章数。

新词与符号

排列	把全部顶点排成先后顺序	n 个不同点共有 $n!$ 种； $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$
闭邻域	$\{v\} \cup N(v)$	顶点自己与它的全部邻居
概率	有利排列数除以全部排列数	这里只是有限比例
期望	所有排列结果的普通平均	不表示每次结果相同

$P_3 = a - b - c$ 的排列	被选顶点	个数
abc	a	1
acb	a, c	2
bac	b	1
bca	b	1
cab	c, a	2
cba	c	1

再讲精确

对图 H 的每个排列，选出所有“在自己的闭邻域中排最早”的顶点。若相邻的 u, v 都被选，则 u 必须早于 v ，同时 v 必须早于 u ，不可能；故所选集合独立。

固定顶点 v 。它的闭邻域共有 $d_H(v) + 1$ 个点。在全部排列中，这些点中的每一个同样可能排在该小集合最早位置：若 x, y 是其中两点，把任一排列中 x, y 的位置互换、其余位置不动，就得到一个可逆的一一对应；“ x 在闭邻域最早”的排列恰好对应“ y 在闭邻域最早”的排列。因此 $d_H(v) + 1$ 种“谁最早”情况数完全相同， v 被选的比例是 $1/(d_H(v) + 1)$ 。把每个顶点的“被选次数”相加再交换计数顺序，平均所选大小为

$$\sum_{v \in V(H)} \frac{1}{d_H(v) + 1}.$$

至少有一个排列的大小不小于平均；而每个结果都是独立集，所以

$$\alpha(H) \geq \sum_v \frac{1}{d_H(v) + 1}.$$

为什么这一步是真的

最后还要把一堆倒数压成只含度数和的式子。对正数 $a_1, \dots, a_n$ ，有

$$\begin{aligned} \left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right) - n^2 &= \sum_{i < j} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} - 2 \right) \\ &= \sum_{i < j} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \geq 0. \end{aligned}$$

因此 $\sum_i 1/a_i \geq n^2 / \sum_i a_i$ 。取 $a_i = d_H(v_i) + 1 > 0$ ，使得

$$\sum_v \frac{1}{d_H(v) + 1} \geq \frac{n^2}{n + \sum_v d_H(v)}.$$

这就是算术平均-调和平均不等式在这里的完整证明。

跟着做一遍

上表六种排列共选了 $1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 = 8$ 个，平均 $8/6 = 4/3$ 。按度数算也有

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

平均 $4/3$ 不是某次必须选出“ $4/3$ 个点”；它只保证至少有一次选出不少于 $4/3$ 个，即至

少二个。表中的 acb, cab 正好做到二。

跟着做一遍

半开放例 B。改看三角形 K_3 。分别按 cab, abc, bca 排队，判断每次哪些点在自己的闭邻域中最早；再不用列完六行，直接由对称性求全部排列的平均选点数。若让相邻两点同时入选，返回“闭邻域内最早”的定义；若把平均数当作每次结果，返回易错框。

最容易掉进去的坑

不需要各顶点“被选事件”相互独立，期望的求和只是一张双重计数表。另一个常见错法是说“期望为 $4/3$ ，所以每次选 $4/3$ 个”；集合大小是整数，各次可以是一或二，平均才是分数。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对三角形 K_3 计算 Caro-Wei 和，并与实际 α 比较。

L1-2 再算。不用排列总表，只按度数重算 P_3 的 Caro-Wei 和。

L2-1 迁移。对四点星 $K_{1,3}$ 计算该和，并给出实际独立集。

L2-2 逻辑边界。解释为什么证明只需“期望可加”，不需不同顶点的入选事件相互独立；给出 K_2 上两个事件不独立的直接证据。

L3 证明。闭卷重建“所选点独立—单点比例—平均—至少一次—倒数和下界”五步链。

核对答案与推理

半开放例 B：在 K_3 中每个点的闭邻域都是全图，所以每个排列只选全局最早的一个点； cab, abc, bca 分别选 c, a, b 。六个排列每次都选一个，平均也是一；由对称性，每点在三点中最早的比例为 $1/3$ ，总和 $3 \cdot 1/3 = 1$ 。

L1-1：每点度二，和为 $3 \cdot 1/3 = 1$ ；三角形独立数也为一，等号成立。

L1-2： $1/(1+1) + 1/(2+1) + 1/(1+1) = 1/2 + 1/3 + 1/2 = 4/3$ 。

L2-1：中心贡献 $1/4$ ，三片叶各贡献 $1/2$ ，合计 $7/4$ ；三片叶组成大小三的独立集，所以实际 $\alpha = 3 \geq 7/4$ 。

L2-2 六层答案。

- 结果：**不需要独立性；只需把每次总入选数写成各顶点 0-1 指示量之和，再交换有限求和次序。
- 定义起点：**顶点 v 入选当且仅当它在自己的闭邻域中最早。
- 合法性：**有限平均满足“和的平均等于平均的和”，这是双重计数恒等式，不含独立性假设。
- 易错：**把“期望可加”误记为“事件必须独立”。
- 复核：**在 K_2 中恰有一个端点最早，故两端同时入选概率为零，而各自入选比例均为 $1/2$ ；若独立，同入概率应为 $1/4$ ，矛盾。
- 评分：**结论 2 分，指示量 2 分，有限双重计数 2 分， K_2 反证 3 分，易错点 1 分。最

低合格必须明确“不独立仍可相加”。

L3: 相邻点不能同时最早，故每次得到独立集；闭邻域内对称性给 $1/(d+1)$ ；双重计数给平均和；至少一个结果不低于平均；正数倒数不等式把它下压为 $n^2/(n + \sum d)$ 。

本卡过关门

合上本卡，用四点路径自行列举部分排列并完整口述五步证明。必须明确说出“平均只保证存在一次”，以及“不要求事件独立”。一天后再来：对五点星 $K_{1,4}$ 计算 Caro-Wei 和，并与四片叶组成的独立集比较。核对键：中心贡献 $1/5$ ，四叶共贡献 $4 \cdot 1/2 = 2$ ，总和 $11/5$ ；实际 $\alpha = 4$ 。

对应交互审查卡：45

1.5 卡 46: Charging: 给两步可达点分配不同收据

学完本卡，你应该能做到

对固定顶点 v ，构造一个注入映射，严格证明

$$d_{G^2}(v) \leq \sum_{u \in N_G(v)} d_G(u),$$

并逐类排除“两个点收到同一张收据”的可能。

前置知识：卡 44；零基础预备课中的映射、邻点和距离。本卡是红线卡。

人口自测 (1) $d_{G^2}(v)$ 数哪些点？(2) 一一分配为什么能证明“物品数不超过收据数”？(3) 距离二点至少有一个什么样的中间点？**回退路由：**第 (1) 题错，回卡 44；第 (2) 题错，回零基础预备篇“注入”；第 (3) 题错，回卡 03 的最短路与距离二定义。

先讲人话

站在 v 看，平方图邻居分两层：一步到的、两步到的。我们给每个被看见的点发一张不同的“有方向收据” (u, z) 。只要不撞号，被看见点的数量就不超过所有可用收据数。

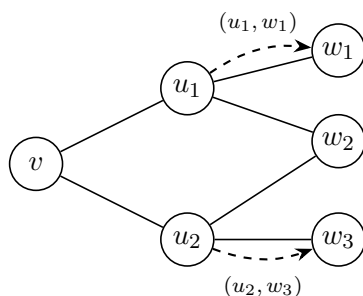
新词与符号

$N_G(v)$ 是 v 的邻点集合。一个**关联** (u, z) 在本卡中表示“ u 与 z 有边”，并保留先后位置；对固定 v ，可用收据集合为

$$\mathcal{I}_v = \{(u, z) : u \in N_G(v), z \in N_G(u)\}.$$

符号 $\mathcal{I}_v$ 读作“花体 I 下标 v ”，只是给这盒收据取的名字。其大小是 $\sum_{u \in N_G(v)} d_G(u)$ ，因为对每个第一坐标 u ，第二坐标有 $d_G(u)$ 种。

注入就是“不同输入一定得到不同输出”的分配。若把每个学生分配到不同座位，学生人数就不会超过座位数；本卡用的正是这一计数原则。



图中的细实线是 G 的边；带箭头的粗虚线只示意“把顶点分配给哪张收据”，不是再给 G 增加边。

再讲精确

固定 v 。对 G^2 的每个邻点 w 分配收据：

1. 若 $w \in N_G(v)$ ，分配 (w, v) ；
2. 若 $\text{dist}_G(v, w) = 2$ ，固定选择一条两步路 $v - u - w$ ，分配 (u, w) 。

每张收据都在 $\mathcal{I}_v$ 中。有限图中若有多条两步路，可按预先固定的点名顺序选最小中间点；“选一条”不会影响存在性。

为什么这一步是真的

证明不撞号分三类：

1. 两个一步邻点 $w_1 \neq w_2$ 得 (w_1, v) 与 (w_2, v) ，第一坐标不同；
2. 两个距离二点 $z_1 \neq z_2$ 得 (u_1, z_1) 与 (u_2, z_2) ，第二坐标不同；
3. 一步点的收据形如 (w, v) ，距离二点的收据形如 (u, z) ，若相等会迫使 $z = v$ ，但 z 是与 v 距离二的另一个点，不可能等于 v 。

故这是从 $N_{G^2}(v)$ 到 $\mathcal{I}_v$ 的注入，前者大小不超过后者大小，得到目标不等式。

跟着做一遍

在四环 C_4 中固定 v 。平方图里其余三个点都与 v 相邻，所以左边为三。原图中 v 有两个邻点，它们度数都为二，右边为四。分配只用掉四张候选收据中的三张，因此得到 $3 \leq 4$ ，不要求等号。

跟着做一遍

半开放例 B。 在 $P_4 = 1 - 2 - 3 - 4$ 中固定 $v = 2$ 。已发收据 $1 \mapsto (1, 2)$ 、 $3 \mapsto (3, 2)$ ；请给点 4 发收据，并说明为何不会与前两张相同。若只写中间点 3，返回有序对定义；若没有逐类查重，返回 why 框。

最容易掉进去的坑

只说“一个两步点对应一条两步路”不够，因为不同点或不同路可能重复计数。证明的核心是**收据有序对互异**。另外，距离二点可能有多个中间点；必须固定一种选择规则，不能

在后续比较中随意改选。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。在 P_4 中固定顶点 2，列出 G^2 邻点、全部分配及右端。

L1-2 再核。在 C_5 中固定一个点，计算不等式两端并判断是否等号。

L2-1 迁移。在星图 $K_{1,3}$ 中分别固定中心和一片叶子，核对不等式。

L2-2 失败构造。构造 $v-u-w_1$ 与 $v-u-w_2$ ，其中 $w_1 \neq w_2$ ，说明若距离二点只记中间点 u ，映射为何不是注入。

L3 证明。有人把距离二点 w 只记到中间点 u ，而不记 (u, w) 。构造或解释为什么会撞号。

核对答案与推理

半开放例 B: $4 \mapsto (3, 4)$ ；它的第二坐标是 4，而一步收据第二坐标都是 2，所以不同。

L1-1: P_4 中 2 的平方邻点为 1, 3, 4。一步点可记 $(1, 2), (3, 2)$ ，距离二点 4 经 3 记 $(3, 4)$ ；右端 $d(1) + d(3) = 1 + 2 = 3$ ，等号。

L1-2: $C_5^2 = K_5$ ，左端为四；固定点的两个原邻点度数均为二，右端也是四，等号。

L2-1: 固定中心，左边三，右边三片叶度数和三；固定叶子，平方图仍看见其余三点，右边只有中心度三，仍等号。

L2-2 六层答案。

- 结果：**只记 u 会让 w_1, w_2 都映到同一对象，不能证明数量上界；记 (u, w_i) 后两张收据不同。
- 定义起点：**注入要求不同输入得到不同输出。
- 合法性：** $v-u-w_i$ 都是两步路，所以 w_i 都属于 $N_{G^2}(v)$ ，而 $(u, w_i) \in \mathcal{I}_v$ 。
- 易错：**“每个点都能选一条路”只证明有映射，不保证一一。
- 复核：** $w_1 \neq w_2$ ，故 $(u, w_1) \neq (u, w_2)$ ；第二坐标正是防撞号标签。
- 评分：**图形合法 2 分，注入定义 2 分，碰撞 2 分，有序对修复 2 分，复核 2 分。最低合格必须写出两个不同 w_i 的同中间点碰撞。

L3: 若两个不同距离二点都经同一个 u 到达，只记 u 会把二者装进同一格；加入第二坐标 w 才能区分。

本卡过关门

闭卷重画两层邻域，并完整说出三类不冲突证明。若只说“显然一一对应”或漏掉一步点与两步点之间的冲突，本卡不通过。**一天后再来：**在五环 C_5 中固定任一点，实际写出全部 charge。核对键：可将两个一步点记为 $(u_1, v), (u_2, v)$ ，两个距离二点分别经 u_1, u_2 记收据；四张收据全部不同，左右两端均为四，没有未用收据。

七天后红线复测（独立题面）：在六环 C_6 中固定 $v = 1$ ，按本卡规则给 G^2 的四个邻点分配收据，并逐类查重。**自校验键：**一步点 2, 6 分别取 $(2, 1), (6, 1)$ ；距离二点 3, 5 可分别经 2, 6 取 $(2, 3), (6, 5)$ 。四张有序对互异；右侧候选收据总数为 $d(2) + d(6) = 4$ ，所以本例取

等号 $d_{G^2}(1) = 4$ 。

对应交互审查卡：46

1.6 卡 47：求和换序与度数平方

学完本卡，你应该能做到

把卡 46 的逐点不等式对所有 v 求和，逐项解释换序为何得到 $\sum d(v)^2$ ；再用最大度和平均度推出

$$\sum_v d_{G^2}(v) \leq \Delta n \bar{d}.$$

前置知识：卡 46、01；零基础预备课中的求和、平均数与非负数乘法。

人口自测 (1) $\sum_v$ 表示什么？(2) 固定点 u 会作为多少个点 v 的邻居出现？(3) 若 $0 \leq d(u) \leq \Delta$ ，乘以 $d(u)$ 后方向怎样？**回退路由：**第 (1) 题错，回零基础预备篇“求和”；第 (2) 题错，回卡 01 的度数定义；第 (3) 题错，回零基础预备篇“非负数乘不等式”。

先讲人话

想象一张收费表：每一行属于观察点 v ，行里把邻居 u 的度数写一次。现在把表旋转，按 u 收集。点 u 有 $d(u)$ 个邻居，所以它那一列重复写了 $d(u)$ 次，每次都是 $d(u)$ ，总贡献 $d(u)^2$ 。

新词与符号

双重和	先按 v ，再按其邻居 u 相加	$\sum_v \sum_{u \in N(v)}$
换序求和	对同一批有限项目改用另一种分组	不会增加或删除任何项目
度数平方和	$\sum_u d(u)^2$	逐点平方再相加
平均度 $\bar{d}$	所有度数之和除以 n	$\sum_u d(u) = n\bar{d}$

观察点 v	邻居 u_1	邻居 u_2	$\cdots$	本行和
v	$d(u_1)$	$d(u_2)$	$\cdots$	$\sum_{u \in N(v)} d(u)$
按固定 u 重收	u 被它的 $d(u)$ 个邻点各数一次			$d(u) \cdot d(u)$

再讲精确

卡 46 对每个 v 给出

$$d_{G^2}(v) \leq \sum_{u \in N_G(v)} d_G(u).$$

对所有 v 相加并换序：

$$\begin{aligned}\sum_v d_{G^2}(v) &\leq \sum_v \sum_{u \in N(v)} d(u) \\ &= \sum_u d(u) |\{v : u \in N(v)\}| \\ &= \sum_u d(u)^2.\end{aligned}$$

无向图中 $u \in N(v)$ 当且仅当 $v \in N(u)$ ，所以花括号中恰有 $d(u)$ 个点。

为什么这一步是真的

因为 $0 \leq d(u) \leq \Delta$ ，把 $d(u) \leq \Delta$ 两边乘以非负数 $d(u)$ ，方向不变：

$$d(u)^2 \leq \Delta d(u).$$

再求和并使用平均度定义 $\sum_u d(u) = n\bar{d}$ ：

$$\sum_v d_{G^2}(v) \leq \sum_u d(u)^2 \leq \Delta \sum_u d(u) = \Delta n\bar{d}.$$

跟着做一遍

对 P_4 ，原图度数为 $1, 2, 2, 1$ ；平方图度数为 $2, 3, 3, 2$ 。于是

$$\sum d_{G^2} = 10, \quad \sum d_G^2 = 1 + 4 + 4 + 1 = 10,$$

而 $\Delta \sum d_G = 2 \cdot 6 = 12$ 。平均度 $\bar{d} = 6/4 = 3/2$ ，所以末项也等于 $2 \cdot 4 \cdot (3/2) = 12$ 。

跟着做一遍

半开放例 B。 对 $P_3 = 1 - 2 - 3$ ，按观察点分行的双重和是

$$v = 1 : d(2) = 2, \quad v = 2 : d(1) + d(3) = 1 + 1, \quad v = 3 : \underline{\hspace{2cm}}.$$

补最后一行，再按被观察点重组为三个平方贡献。若把项目数改变，返回“同一批有限项目换分组”；若把 $\sum d^2$ 写成 $(\sum d)^2$ ，返回易错框。

最容易掉进去的坑

$$\sum_v d(v)^2 \neq \left(\sum_v d(v) \right)^2.$$

左边先逐个平方再相加；右边先相加再平方，包含大量交叉项。另一个错误是把“ u 被数 $d(u)$ 次”说成“被数 Δ 次”；只有度达到最大值的点才被数 Δ 次。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对四点星 $K_{1,3}$ 计算三层数量 $\sum d_{G^2}, \sum d^2, \Delta \sum d$ 。

L1-2 再算。若 G 是 d -正则的 n 阶图，直接化简 $\sum_u d(u)^2$ 与 $\Delta \sum_u d(u)$ 。

L2-1 迁移。把双重和 $\sum_v \sum_{u \in N(v)} d(u)$ 写成一张实际的 P_4 项目清单，再按 u 分组。

L2-2 等号条件。逐点分析 $d(u)^2 \leq \Delta d(u)$ 何时等号，并给出全图求和等号的充要条件。

L3 解释。为什么 $d(u)^2 \leq \Delta d(u)$ 需要知道 $d(u) \geq 0$ ？若乘数为负会怎样？

核对答案与推理

半开放例 B：最后一行为 $d(2) = 2$ ；重组为 $d(1)^2 + d(2)^2 + d(3)^2 = 1 + 4 + 1 = 6$ 。

L1-1: $K_{1,3}^2 = K_4$ ，第一项 $4 \cdot 3 = 12$ ；原度数 $3, 1, 1, 1$ ，平方和 $9 + 3 = 12$ ；末项 $3(3 + 1 + 1 + 1) = 18$ 。

L1-2: $\sum d(u)^2 = nd^2$ ；此时 $\Delta = d$ ，所以 $\Delta \sum d(u) = d \cdot nd = nd^2$ ，等号。

L2-1: 各行分别写邻居度：点 1 行写 $d(2) = 2$ ；点 2 行写 $d(1) + d(3) = 1 + 2$ ；点 3 行写 $d(2) + d(4) = 2 + 1$ ；点 4 行写 $d(3) = 2$ 。按 u 分组得 $1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$ 。

L2-2 六层答案。

- 1. 结果：**逐点等号当且仅当 $d(u) \in \{0, \Delta\}$ ；求和等号当且仅当每个顶点的度都是零或 Δ 。
- 2. 定义起点：** $d(u)^2 \leq \Delta d(u)$ 等价于 $d(u)(\Delta - d(u)) \geq 0$ 。
- 3. 合法性：** $0 \leq d(u) \leq \Delta$ ，两个因子都非负。
- 4. 易错：**图不必整体正则；可以有孤立点与 Δ -正则分量并存。
- 5. 复核：**每项差为 $d(u)(\Delta - d(u)) \geq 0$ ；非负项之和为零恰当且仅当每项为零。
- 6. 评分：**等价改写 2 分，逐点等号 2 分，求和条件 2 分，孤立点边界 2 分，复核 2 分。最低合格不能只写“正则图”。

L3: 不等式两边乘非负数方向不变；若乘负数必须反向。本处度数是计数，天然非负。

本卡过关门

不用看式子，从“逐点 charging”开始口述三次变形：双重和换序、度平方受最大度控制、度数和变成 $n\bar{d}$ 。能在非正则小图逐项核对才通过。**一天后再来：**对五点星 $K_{1,4}$ 重算三层和。核对键： $K_{1,4}^2 = K_5$ ，故 $\sum d_{G^2} = 20$ ； $\sum d^2 = 4^2 + 4 = 20$ ； $\Delta \sum d = 4 \cdot 8 = 32$ 。第一步等号，第二个不等号严格。

1.7 卡 48: packing 密度的普适下界

学完本卡，你应该能做到

把 Caro–Wei/平均不等式与度数平方上界正确拼接，检查正分母和倒数方向，推出

$$\frac{\rho(G)}{n} \geq \frac{1}{1 + \Delta \bar{d}}.$$

前置知识：卡 45、47；本卡会重讲正数取倒数时的方向。

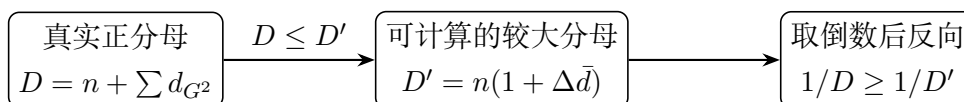
人口自测 (1) 若 $0 < A \leq B$, $1/A$ 与 $1/B$ 谁大? (2) 为什么 $n + \sum d_{G^2}$ 为正? (3) 卡 44 把 ρ 变成哪个独立数? 回退路由: 第 (1) 题错, 回零基础预备篇“正数倒数”; 第 (2) 题错, 回卡 47 并逐项检查非负性; 第 (3) 题错, 回卡 44 的双向等价。

先讲人话

平方图越拥挤, 能选的独立点通常越少。我们不知道平方图每个点的精确度数, 但卡 47 给了总拥挤度的天花板。把最坏天花板放进分母, 就得到一个对所有图都安全的 packing 保底比例。

新词与符号

$\rho(G)/n$ 称为 **packing 密度**: 不是说点真的被切成分数, 而是“最大可选点数占全部顶点的比例”。分母 $1 + \Delta \bar{d} \geq 1$, 始终为正。



再讲精确

对 $H = G^2$ 使用卡 45, 并用卡 44 的 $\rho(G) = \alpha(G^2)$:

$$\rho(G) \geq \frac{n^2}{n + \sum_v d_{G^2}(v)}.$$

卡 47 给

$$n + \sum_v d_{G^2}(v) \leq n + \Delta n \bar{d} = n(1 + \Delta \bar{d}).$$

两个分母均为正。较小正数的倒数较大, 所以

$$\frac{n^2}{n + \sum_v d_{G^2}(v)} \geq \frac{n^2}{n(1 + \Delta \bar{d})} = \frac{n}{1 + \Delta \bar{d}}.$$

除以正数 n , 得到目标式。

为什么这一步是真的

用具体数看倒数方向： $4 \leq 10$ ，但 $1/4 \geq 1/10$ 。原因是同一个“一”被分成更少份时，每份更大。本证明把真实分母用一个更大的上界替换，所以右边变小；仍然是 ρ 的安全下界。

跟着做一遍

对 P_4 , $n = 4, \Delta = 2, \bar{d} = 3/2$, 所以

$$\frac{\rho}{n} \geq \frac{1}{1 + 2 \cdot 3/2} = \frac{1}{4}, \quad \rho \geq 1.$$

实际可选端点 $\{1, 4\}$, 故 $\rho = 2$ 。下界可以不紧；“普适”只保证从不高估最低可选量。

跟着做一遍

半开放例 B。改用 $\Delta = 3, \bar{d} = 2$ 。请补完

$$1 + \Delta \bar{d} = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \rho/n \geq \underline{\hspace{1cm}}.$$

再判断 $n = 50$ 时整数 ρ 至少几。若对下界向下取整，返回“整数至少”规则；若倒数方向写反，返回 why 框。

最容易掉进去的坑

从分母上界得到的是分式下界。若误写成 $\rho/n \leq 1/(1 + \Delta \bar{d})$ ，后面整个 gap 方向都会崩坏。另请勿把 $\bar{d}$ 当整数；它是平均数，可以是 $3/2$ 。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。 若 $\Delta = 3, \bar{d} = 2$, packing 密度至少多少？一百个顶点时整数 ρ 至少多少？

L1-2 再算。 若只知 $n = 30$ 且密度下界为 $1/7$ ，整数 ρ 至少多少？

L2-1 迁移。 假设你另知 $\sum d_{G^2} \leq 5n$ ，直接给出更贴近的密度下界。

L2-2 边界。 取一个有 $n \geq 1$ 个孤立点的无边图，故 $\bar{d} = 0$ 。本卡不等式给什么？与实际 packing 比较，并说明虽然本篇极值量要求连通，这条普适不等式为何仍可在无边图上自检。

L3 解释。 完整解释链中两次方向：先放大分母、再取倒数；最后除以 n 。

核对答案与推理

半开放例 B： 分母为 $1 + 3 \cdot 2 = 7$ ，密度至少 $1/7$ ； $50/7$ 介于 7 与 8 之间，而 ρ 是整数，故 $\rho \geq 8$ 。

L1-1： 密度至少 $1/(1 + 6) = 1/7$ ； $n = 100$ 时 $\rho \geq 100/7$ ，因 ρ 是整数，所以至少 15。

L1-2： $\rho \geq 30/7$ ，向上取整得 $\rho \geq 5$ 。

L2-1： $\rho \geq n^2/(n + 5n) = n/6$ ，故密度至少 $1/6$ 。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** $\rho/n \geq 1$ ，实际也有 $\rho = n$ ，等号。

2. **定义起点：** 这里的图是有 $n \geq 1$ 个孤立点的无边图；它不是卡 01 约定的零顶点空图。

任意两个不同顶点位于不同孤立分量，距离为 $+\infty$ 。

3. **合法性**：全部顶点两两距离至少三，所以全体顶点是 packing；同时 $\Delta = \bar{d} = 0$ ，分母为一。

4. **易错**：本书统一把 $V(G) = \emptyset$ 称为“空图”，把有顶点但没有边的图称为“无边图”；两者不得混称。

5. **复核**： $\rho \leq n$ 总成立，而全体顶点给 $\rho \geq n$ ，故 $\rho = n$ 。

6. **评分**：距离约定 2 分，代式 2 分，合法 packing 2 分，上界复核 2 分，研究域边界 2 分。最低合格必须说明：本不等式对任意有限图成立，尽管 c_Δ 另有限定。

L3：真实分母不超过上界分母；正数取倒数后方向反转，所以真实分式不小于替换后的分式；再除以正数 n ，不等号方向保持。

本卡过关门

闭卷从 $\rho \geq n^2/(n + \sum d_{G^2})$ 推到最终密度式，每一个不等号旁写“分母上界”“正数倒数反向”“除以正数”。一天后再来：取 $\Delta = 4, \bar{d} = 5/2$ 。核对键：密度至少 $1/(1+10) = 1/11$ ；若图有 n 点，则 $\rho \geq \lceil n/11 \rceil$ 。

对应交互审查卡：48

1.8 卡 49：把 packing 下界代入 gap：负系数决定方向

学完本卡，你应该能做到

从余量恒等式逐行写出单位 gap；在 ρ/n 前识别负系数；把卡 48 的下界代入并得到正确的 gap 上界。

前置知识：卡 09、48；零基础预备课中的负数乘不等式。本卡是红线卡。

入口自测 (1) gap 与 μ 的符号关系是什么？(2) 若 $x \geq L$ ，则 $-x$ 与 $-L$ 谁大？(3) $2m/n$ 等于什么？回退路由：第 (1) 题错，回卡 08；第 (2) 题错，回零基础预备篇“负数乘不等式”；第 (3) 题错，回卡 01 的平均度与握手引理。

先讲人话

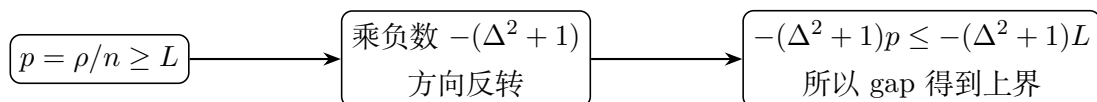
packing 越大，需要放进识别覆盖的点就越少，所以违反量反而越小。像预算中一项前面带减号：你知道被减数至少多大，就能知道最后余额至多多大。

新词与符号

把 $p = \rho(G)/n$ 看作 packing 密度。gap 的表达式中 p 前面的系数是

$$-\frac{\Delta^2 + 1}{\Delta^2 + 1} = -1 < 0.$$

因此 p 的下界会给 gap 的上界。这是本卡最关键的方向转换。



再讲精确

从余量恒等式

$$\mu = (\Delta^2 + 1)\rho - ((\Delta + 1)n - 2m)$$

及 $g = -\mu/(\Delta^2 + 1)$ 出发:

$$\begin{aligned} \frac{g(G)}{n} &= -\frac{\mu}{(\Delta^2 + 1)n} \\ &= \frac{(\Delta + 1)n - 2m - (\Delta^2 + 1)\rho}{(\Delta^2 + 1)n} \\ &= \frac{\Delta + 1 - \bar{d} - (\Delta^2 + 1)\rho/n}{\Delta^2 + 1}. \end{aligned}$$

卡 48 给 $\rho/n \geq 1/(1 + \Delta\bar{d})$ 。乘以负数 $-(\Delta^2 + 1)$ 后方向反转，故

$$\frac{g(G)}{n} \leq \frac{\Delta + 1 - \bar{d} - \frac{\Delta^2 + 1}{1 + \Delta\bar{d}}}{\Delta^2 + 1}. \quad (1.1)$$

为什么这一步是真的

把符号抽掉：若 $p \geq L$ ，则 $-p \leq -L$ 。在相同的其他项上加减不会改变方向，再除以正数 $\Delta^2 + 1$ 也不改变方向。所以“packing 保底”自然转成“gap 封顶”。

跟着做一遍

取 $\Delta = 4, \bar{d} = 2$ 。卡 48 给 $p \geq 1/9$ ，于是

$$\frac{g}{n} \leq \frac{5 - 2 - 17/9}{17} = \frac{10}{153}.$$

若真实 p 更大，例如只作算术演示取 $p = 1/5$ ，原表达式变成 $(3 - 17/5)/17 = -2/85$ ，确实比 $10/153$ 更小。下界代入给的是最坏上限，不是假称真实 p 等于 $1/9$ 。

跟着做一遍

半开放例 B。取 $\Delta = 3, \bar{d} = 2$ 。先补出 $p \geq 1/(1 + \underline{\quad}) = \underline{\quad}$ ，再代入

$$g/n \leq \frac{4 - 2 - 10p}{10}.$$

若代入下界后把“ $\leq$ ”写成“ $\geq$ ”，返回负系数图；若把 p 当成必然等于下界，返回例 A 最后一句。

最容易掉进去的坑

最常见错误是直接把 $p \geq L$ 原方向复制到带 $-p$ 的式子中。另一个错误是把 $2m/n$ 写成 m/n ；平均度等于度数和除以 n ，而度数和是 $2m$ 。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。取 $\Delta = 5, \bar{d} = 3$ ，算出卡 48 的 p 下界和本卡的 g/n 上界。

L1-2 数值方向。仍取 $\Delta = 4, \bar{d} = 2$ ，分别把 $p = 1/9$ 与 $p = 2/9$ 代入原表达式，比较两个 gap 数值。

L2-1 迁移。从 $\tau_D = n - \rho$ 和 $B_{HY}/n = [\Delta(\Delta - 1) + \bar{d}]/(\Delta^2 + 1)$ 走另一条路线，重新推出同一单位 gap 表达式。

L2-2 符号审计。设 $p \geq L$ ，从单位 gap 的精确式开始，只使用一次“乘负数反向”和一次“除正数不改向”，推出式 (1.1)。

L3 诊错。有人写：“ $p \geq L$ ，所以 $-(\Delta^2 + 1)p \geq -(\Delta^2 + 1)L$ 。”指出具体规则。

核对答案与推理

半开放例 B：两格为 6 与 $1/7$ ；代入得 $g/n \leq (2 - 10/7)/10 = 2/35$ 。

L1-1： $p \geq 1/(1 + 15) = 1/16$ ；

$$\frac{g}{n} \leq \frac{6 - 3 - 26/16}{26} = \frac{11}{208}.$$

L1-2： $p = 1/9$ 时为 $10/153$ ； $p = 2/9$ 时为 $-7/153$ 。packing 密度增大，gap 严格减小。

L2-1：

$$\begin{aligned} \frac{g}{n} &= 1 - p - \frac{\Delta(\Delta - 1) + \bar{d}}{\Delta^2 + 1} \\ &= \frac{\Delta^2 + 1 - (\Delta^2 - \Delta) - \bar{d} - (\Delta^2 + 1)p}{\Delta^2 + 1} \\ &= \frac{\Delta + 1 - \bar{d} - (\Delta^2 + 1)p}{\Delta^2 + 1}. \end{aligned}$$

L2-2 六层答案。

1. **结果：** $p \geq L$ 蕴含 $g/n \leq [\Delta + 1 - \bar{d} - (\Delta^2 + 1)L]/(\Delta^2 + 1)$ 。
2. **定义起点：** $g/n = [\Delta + 1 - \bar{d} - (\Delta^2 + 1)p]/(\Delta^2 + 1)$ 。
3. **合法性：** $-(\Delta^2 + 1) < 0$ ，故乘法反向；最终分母 $\Delta^2 + 1 > 0$ ，故除法保持方向。
4. **易错：**把 p 的下界当作等式，或漏掉负系数造成的反向。
5. **复核：**任选 $p_2 > p_1$ ，两式相减为 $-(p_2 - p_1) < 0$ ，所以 gap 随 p 下降。
6. **评分：**精确式 2 分，负系数 2 分，反向 2 分，正分母 2 分，数值/差分复核 2 分。最低合格必须写出两个符号依据。

L3：乘数 $-(\Delta^2 + 1)$ 为负，必须反向；正确是“ $\leq$ ”。

本卡过关门

闭卷从 $-\mu$ 写到式 (1.1)，每行注明依据。**24 小时后不同数据**：只作代数方向检验，取 $\Delta = 6, \bar{d} = 4$ ，分别代 $p_1 = 1/25, p_2 = 2/25$ ；不声称两数都由真实图实现。核对键：精确式为 $(3 - 37p)/37$ ，两值依次为 $38/925$ 与 $1/925$ ； $p_2 > p_1$ 而 gap 变小。方向、两分数及“仅代数检验”三项全对才通过。

七天后红线复测（独立题面）：取 $\Delta = 5, \bar{d} = 3$ 。先由卡 48 写 packing 密度下界，再代入负系数式求单位 gap 的统一上界；说明为什么不能把下界当等号。**自校验键**： $p \geq 1/(1 + 5 \cdot 3) = 1/16$ ；因此 $g/n \leq (6 - 3 - 26/16)/26 = 11/208$ 。真实 p 若更大，前面的负系数使 gap 更小；故 $1/16$ 只是用于封顶，不是声称真实密度。

对应交互审查卡：49

1.9 卡 50：平均度优化、上确界与 $\limsup$

学完本卡，你应该能做到

不用微积分，以换元和 AM-GM 找到卡 49 右端在 $0 \leq \bar{d} \leq \Delta$ 的最大值；检查等号点在允许区间；把逐图上界传给 c_Δ ，再严格推出

$$c_\Delta \leq \frac{(\sqrt{\Delta + \Delta^{-1}} - 1)^2}{\Delta^2 + 1}, \quad \limsup_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_\Delta \leq 1.$$

并能读懂可选的导数证明。

前置知识：卡 42、49；零基础预备课中的正数、根号、上确界、极限和 AM-GM。本卡是红线卡。

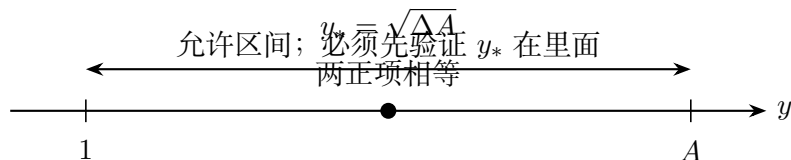
人口自测 (1) 平均度为何在 $[0, \Delta]$? (2) 正数 p, q 的 AM-GM 是什么，何时等号? (3) 逐图上界为何也是上确界的上界? 回退路由：第 (1) 题错，回卡 47；第 (2) 题错，回零基础预备篇“AM-GM”；第 (3) 题错，回卡 42 的上确界定义。

先讲人话

卡 49 给每张图一个只依赖平均度 $\bar{d}$ 的天花板，但我们不知道某张极端图的平均度。于是把滑块 $\bar{d}$ 从零推到 Δ ，寻找天花板自身的最高位置。主证明只用“两个正数和在乘积固定时至少为两倍几何平均”。

新词与符号

Δ^{-1}	$1/\Delta$	负一指数表示倒数
$\sqrt{x}$	x 的非负平方根	与自己相乘等于 x
AM-GM	算术平均不小于几何平均	$p + q \geq 2\sqrt{pq}$, $p = q$ 时等号
$\limsup$	上极限	数列尾部可能达到的长期上方界

**再讲精确**

令 $x = \bar{d}$, $A = \Delta^2 + 1$ 。只需最大化式 (1.1) 的分子

$$F_{\Delta}(x) = \Delta + 1 - x - \frac{A}{1 + \Delta x}, \quad 0 \leq x \leq \Delta.$$

换元

$$y = 1 + \Delta x > 0, \quad x = \frac{y - 1}{\Delta}.$$

当 $x \in [0, \Delta]$ 时, $y \in [1, A]$ 。逐步代入:

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(x) &= \Delta + 1 - \frac{y - 1}{\Delta} - \frac{A}{y} \\ &= \Delta + 1 + \frac{1}{\Delta} - \left(\frac{y}{\Delta} + \frac{A}{y} \right). \end{aligned}$$

括号中两项为正, 且乘积固定:

$$\frac{y}{\Delta} \cdot \frac{A}{y} = \frac{A}{\Delta} = \Delta + \Delta^{-1}.$$

由 AM-GM,

$$\frac{y}{\Delta} + \frac{A}{y} \geq 2\sqrt{\Delta + \Delta^{-1}},$$

等号当且仅当 $y/\Delta = A/y$, 即

$$y_* = \sqrt{\Delta A}.$$

为什么这一步是真的

先检查等号点合法。对 $\Delta \geq 1$, $1 \leq \sqrt{\Delta A} \leq A$: 左边因 $\Delta A \geq 1$; 右边平方后等价于 $\Delta \leq A = \Delta^2 + 1$ 。因此 y_* 在允许区间。对应

$$x_* = \frac{\sqrt{\Delta A} - 1}{\Delta} = \sqrt{\Delta + \Delta^{-1}} - \Delta^{-1} \in [0, \Delta].$$

在该点括号最小, 所以 F_{Δ} 最大。最大值为

$$\begin{aligned} F_{\Delta}(x_*) &= \Delta + 1 + \Delta^{-1} - 2\sqrt{\Delta + \Delta^{-1}} \\ &= (\sqrt{\Delta + \Delta^{-1}} - 1)^2. \end{aligned}$$

最后一步使用 $(z - 1)^2 = z^2 + 1 - 2z$, 其中 $z^2 = \Delta + \Delta^{-1}$ 。

跟着做一遍

取 $\Delta = 4$ 。则 $A = 17$,

$$x_* = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{4} \approx 1.812,$$

确在 $[0, 4]$ 。因此每张实际最大度四的连通图都满足

$$\frac{g(G)}{n} \leq \frac{(\sqrt{17}/2 - 1)^2}{17}.$$

这个数是对所有可能平均度统一取到的天花板；并不声称存在一张图的平均度恰好等于 x_* ，更不声称达到上界。

跟着做一遍

半开放例 B。取 $\Delta = 3$ ，则 $A = 10$ 、 $y \in [1, 10]$ 。请补

$$y_* = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_* = \underline{\hspace{2cm}}, \quad U_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

若只解出等号点而不检查 $1 \leq y_* \leq 10$ ，返回区间检查；若说某张图必取到 U_3 ，返回上确界边界。

再讲精确

因为每张定义域内的图都满足上述界，取上确界得到

$$c_\Delta \leq U_\Delta := \frac{(\sqrt{\Delta + \Delta^{-1}} - 1)^2}{\Delta^2 + 1}. \quad (1.2)$$

再看缩放后的右边。令 $q = \Delta + \Delta^{-1}$ ，注意 $\Delta q = \Delta^2 + 1 = A$ ：

$$\begin{aligned} \Delta U_\Delta &= \frac{\Delta(q + 1 - 2\sqrt{q})}{A} \\ &= 1 - \frac{\Delta(2\sqrt{q} - 1)}{A}. \end{aligned}$$

修正项为正。且对 $\Delta \geq 1$ ， $q \leq 2\Delta$ 、 $A \geq \Delta^2$ ，所以

$$0 \leq \frac{\Delta(2\sqrt{q} - 1)}{A} \leq \frac{2\Delta\sqrt{2\Delta}}{\Delta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta}} \rightarrow 0.$$

故 $\Delta U_\Delta \rightarrow 1$ 。由 $\Delta c_\Delta \leq \Delta U_\Delta$ ，

$$\limsup_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_\Delta \leq 1.$$

为什么这一步是真的

这里的 $\limsup$ 不要求 Δc_Δ 已知收敛。它只说：无论数列怎样轻微摆动，其长期最高聚集水平不超过一。下一篇将构造下界并证明 $\liminf \geq 1$ ；上下合拢后，才能宣布真正极限等于一。

学术边界

可选进阶：导数路线。若已经学过微积分，对

$$F_{\Delta}(x) = \Delta + 1 - x - \frac{A}{1 + \Delta x}$$

求导：

$$F'_{\Delta}(x) = -1 + \frac{A\Delta}{(1 + \Delta x)^2}, \quad F''_{\Delta}(x) = -\frac{2A\Delta^2}{(1 + \Delta x)^3} < 0.$$

二阶导恒负说明函数严格凹；唯一驻点满足 $(1 + \Delta x)^2 = A\Delta$ ，正好给出同一个 x_* 。仍须检查 $x_* \in [0, \Delta]$ 。导数不是本卡主证明的隐藏前提，只是帮助你读懂论文中“严格凹、唯一最大点”的标准措辞。

最容易掉进去的坑

- 只解等号条件却不检查 y_* 在 $[1, A]$ ：区间外驻点不能决定区间最大值。
- AM-GM 给括号的最小值；因为括号前有减号，它给 F 的最大值。
- 逐图上界传到 $\sup$ ，不表示某图达到它。
- 只有 $\limsup \leq 1$ 还不能推出 $\Delta c_{\Delta} \rightarrow 1$ ；需要下一篇的匹配下界。

先遮住答案，自己做

L1-1 模仿。对 $\Delta = 5$ 写出 A, y 的允许区间、 y_* 、 x_* 和 U_5 的精确式。

L1-2 合法性。对一般 $\Delta \geq 1$ ，分别平方验证 $1 \leq \sqrt{\Delta A}$ 与 $\sqrt{\Delta A} \leq A$ 。

L2-1 迁移。不看正文，从 $F_{\Delta}(x)$ 开始完整重建换元与 AM-GM 路线，并在每个不等号旁写等号条件。

L2-2 全局性。解释为何“AM-GM 给括号全局下界 + 等号点在允许区间”已经同时排除了两个端点更优的可能；不得只说“图像看起来如此”。

L3 解释/进阶。(a) 为什么“严格凹”意味着至多一个内部最大点？(b) 为什么本卡只给极限的上半边？

核对答案与推理

半开放例 B： $y_* = \sqrt{30}$ ， $x_* = (\sqrt{30} - 1)/3$ ， $U_3 = (\sqrt{3 + 1/3} - 1)^2/10$ ；且 $1 < \sqrt{30} < 10$ 。

L1-1： $A = 26$ ， $y \in [1, 26]$ ， $y_* = \sqrt{130}$ ，

$$x_* = \sqrt{5 + \frac{1}{5}} - \frac{1}{5}, \quad U_5 = \frac{(\sqrt{5 + 1/5} - 1)^2}{26}.$$

L1-2：左式平方后为 $1 \leq \Delta A$ ，因 $\Delta, A \geq 1$ ；右式平方后为 $\Delta A \leq A^2$ ，等价于 $\Delta \leq A = \Delta^2 + 1$ 。

L2-1：评分点依次为：设 A ； $y = 1 + \Delta x$ ；写出 y 区间；把分子改写成常数减 $y/\Delta + A/y$ ；两项正且乘积 A/Δ ；AM-GM；等号 $y^2 = A\Delta$ ；检查区间；代回因式平方；除以正数 A 。

L2-2 六层答案。

1. **结果：** $y_* = \sqrt{\Delta A}$ 给允许区间上 F_{Δ} 的全局最大值，端点不可能更大。

2. **定义起点:** $F_{\Delta} = \text{常数} - [y/\Delta + A/y]$, 且 $y \in [1, A]$ 。
3. **合法性:** AM–GM 对每个允许的正 y 都给同一个下界; 已验证 y_* 在区间且达到等号。
4. **易错:** 只解等号条件却不查区间, 或把括号的最小误说成 F 的最小。
5. **复核:** 端点也属于“每个允许 y ”, 所以同样受 AM–GM 下界约束; 而 y_* 已达界, 端点不能超越。
6. **评分:** 全区间量词 2 分, 正性 2 分, 等号条件 2 分, 区间合法 2 分, 负号翻译 2 分。最低合格必须同时出现“全局”和“合法等号点”。

L3: (a) 严格凹图像向下弯, 斜率严格下降; 若有驻点, 它从上升转为下降且不能再有第二个峰顶。AM–GM 路线已独立证明全局最大。(b) 我们只证明所有候选不超过约 $1/\Delta$; 还未造出能逼近该高度的合法图, 所以只能得 $\limsup \leq 1$ 。

本卡过关门

红线闭卷任务: 在 12 分钟内完成 (1) 从卡 49 的式子换元; (2) AM–GM 与等号条件; (3) 区间检查; (4) 上确界传递; (5) $\Delta U_{\Delta} \rightarrow 1$ 的误差估计。随后能口头读懂导数框。**24 小时后不同题面:** 只给 $Q(y) = y/8 + 65/y$, $y \in [1, 65]$, 先求其全局最小, 再反推 F_8 的最大点与 U_8 。核对键: $A = 65$, $y_* = \sqrt{520} \in [1, 65]$, $x_* = (\sqrt{520} - 1)/8$, $U_8 = (\sqrt{8 + 1/8} - 1)^2/65$; 必须说明 AM–GM 等号点合法, 且这只是统一上界, 不保证某图达到。

七天后红线复测 (独立题面): 只给 $Q(y) = y/5 + 26/y$, $y \in [1, 26]$ 。用 AM–GM 求最小值和等号点, 检查等号点合法, 再反推对应 x_* 与 U_5 ; 最后说明这对图类意味着什么。**自校验键:** $Q(y) \geq 2\sqrt{26/5}$, 等号在 $y_* = \sqrt{130} \in [1, 26]$; $x_* = (\sqrt{130} - 1)/5$, $U_5 = (\sqrt{5 + 1/5} - 1)^2/26$ 。它是所有合法图单位 gap 的统一上界, 不保证存在图或平均度达到等号点。

对应交互审查卡: 50

第二部分

rook 下界与精确首阶渐近

第二章 用棋盘积木逼近真正的最坏情况

本章解决一个比“误差能否无界”更细的问题：当图也越来越大时，平均到每个顶点，猜想最多能错多少？我们会把一个 $s \times s$ 棋盘变成图，再把许多棋盘沿一棵树连接。卡 51-60 的终点是

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_{\Delta} = 1.$$

这句话不会被当成一句需要背诵的口号；我们将逐层说明其中每个符号、每个有限图和每个极限的角色。

2.1 卡 51: rook graph: 把国际象棋车的走法变成图

前置知识：预备篇“图、度数、距离”；卡 01、03。

对应交互审查卡：51

学完本卡，你应该能做到

能从坐标定义画出 rook graph R_s ，并独立证明它有 s^2 个顶点、每点度数 $2(s-1)$ 、边数 $s^2(s-1)$ 、直径恰为二。

先遮住答案，自己做

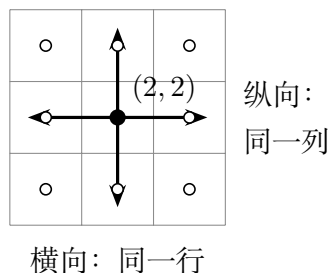
入口三问（只检查先修，不考本卡新知识）。

1. 一张图的“阶”“度数”“距离”分别数什么？若不能各用一句话回答，回到 Z06、Z07。
2. 一个点有三条边接在它身上，它的度数是多少？若答不出，回到 Z06 “握手数边”。
3. 在路径 $a-b-c-d$ 中， a 到 d 的距离是多少？若把“路长”和“顶点个数”混淆，回到 Z07 “边数才是路长”。

三问必须全对才继续；答案依次是：顶点数/接边数/最短路边数，三，三。

先讲人话

想象一个 $s \times s$ 棋盘。每个格子是一个顶点；若一辆车能一步从一个格子走到另一个格子，也就是二者同行或同列，我们就在两点之间连边。这张“谁能一步互到”的图叫 rook graph。rook 读作“车”。



怎样指着图讲：九个空心圆是九个顶点；中央实心点是 $(2,2)$ ；横、竖粗双箭头只表示“同行或同列”这两类邻接。图故意没有画出 R_3 的全部边，因此它能说明定义和中央点的四个邻点，却不能单独充当“全图共有多少条边”的证明。即使黑白打印，实心/空心与横/竖方向仍能区分信息。

新词与符号

$[s]$ 表示 $\{1, 2, \dots, s\}$ ；顶点 (i, j) 表示第 i 行第 j 列。符号 $K_s \square K_s$ 是这种图的标准写法，本书也记成 R_s 。这里的 $\square$ 不是待填充格。

两点“相邻”只问能否一步到达；两点“距离为二”则表示不能一步到达，但存在两步路。 R_s 的下标 s 是棋盘的边长，不是顶点总数。

再讲精确

顶点集为 $[s] \times [s]$ 。两个不同顶点 (i, j) 、 (i', j') 相邻，当且仅当 $i = i'$ 或 $j = j'$ 。于是

$$|V(R_s)| = s^2, \quad d(v) = 2(s-1), \quad |E(R_s)| = s^2(s-1), \quad \text{diam}(R_s) = 2$$

(这里以及本章均取 $s \geq 2$)。

为什么这一步是真的

固定 (i, j) 。同行还有 $s-1$ 个格子，同列也有 $s-1$ 个；这两批不重叠，因为唯一同时同行同列的格子就是自己，而自己已被排除。因此度数是 $2(s-1)$ 。由握手引理，度数总和为 $s^2 \cdot 2(s-1)$ ，每条边被两个端点各数一次，所以边数为 $s^2(s-1)$ 。若两格既不同行也不同列，

$$(i, j) \longrightarrow (i, j') \longrightarrow (i', j')$$

是一条两步路，所以任意两点距离至多二。 $s \geq 2$ 时存在既不同行也不同列的两格，它们不相邻，故直径不是一，而是恰好二。

跟着做一遍

完整例 A： R_3 。

1. 顶点是九个有序对 (i, j) ，所以 $n = 3^2 = 9$ 。
2. $(2, 2)$ 的同行邻点为 $(2, 1), (2, 3)$ ，同列邻点为 $(1, 2), (3, 2)$ ，共 $2 + 2 = 4 = 2(3-1)$ 个。
3. 每点度四，度数总和 $9 \cdot 4 = 36$ ；每条边被数两次，所以 $m = 36/2 = 18$ 。
4. $(1, 1)$ 与 $(3, 3)$ 既不同行也不同列，故不相邻；但 $(1, 1) - (1, 3) - (3, 3)$ 是两步路。因

此直径至少二又至多二，恰为二。

跟着做一遍

半开放例 B：补完 R_4 的参数（约四成步骤留白）。

顶点数： $n = 4 \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

固定 $(1,1)$ ，同行邻点有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个，同列邻点有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个，二者不重叠，所以 $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

边数： $m = nd/2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

为证明直径不是一，可选顶点 $(1,1)$ 与 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；一条两步路是 $(1,1) - \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$ 。

自检：是否写出了“至多二”和“至少二”两个方向？是否把度数总和除以二？

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答：“同行和同列都含自己，所以度数是 $2s$ 。”错在邻点必须是不同顶点；每一类都要去掉自己，正确为 $2(s-1)$ 。
2. 错答：“任意两点最多两步，所以直径就是二。”这只证了直径至多二；还要找一对不同坐标都不同的点，证明距离确为二。
3. 错答：“边数是 $s^2 \cdot 2(s-1)$ 。”这把每条边从两个端点重复数了两次，应再除以二。

先遮住答案，自己做

L1（两题）。（1）求 R_2 的阶、每点度数和边数。（2）求 R_5 的同三项参数。

L2（两题）。（3）在 R_5 中写出 $(1,2)$ 到 $(4,3)$ 的两条不同二步路。（4）不用握手引理，按“每一行一个 K_s 、每一列一个 K_s ”重新数出 R_s 的边数。

L3。（5）若把“同行或同列”误写成“同行且同列”，会得到什么图？为什么这个错误会同时破坏度数和直径结论？

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 4, 16, 3, 3, 6, $16 \cdot 6/2 = 48$ 。可取 $(4,4)$ ，两步路如 $(1,1) - (1,4) - (4,4)$ 。

练习答案。（1） R_2 有四点、每点度二、四条边。（2） R_5 有二十五点、每点度八、百条边。（3）可经 $(1,3)$ ，也可经 $(4,2)$ 。（4）每行内部有 $\binom{s}{2}$ 条边，共 s 行；每列同样。行边与列边不会重合，故 $m = 2s\binom{s}{2} = s^2(s-1)$ 。（5）两个不同格子不可能同时同行同列，得到有 s^2 个孤立点的无边图；度数全为零，且不同点距离为 $+\infty$ ，不再有直径二。

六层评分示范（第 4 题，10 分）。

1. **定义起点（2 分）：**一条边连接一对同行格或一对同列格。
2. **逐步合法性（2 分）：**一行的任意两格相邻，形成 K_s ，故有 $\binom{s}{2}$ 条边；共有 s 行。
3. **不重不漏（2 分）：**同理列边有 $s\binom{s}{2}$ 条；不同两点不可能既同行又同列，所以两批无重合。
4. **结果（1 分）：** $2s\binom{s}{2} = s^2(s-1)$ 。

5. **最易错处 (1 分)**: 不能把一条行边又当列边; 不能漏掉组合数中的除以二。

6. **独立复核 (2 分)**: 用握手引理得到 $s^2 \cdot 2(s-1)/2$, 与前式相同。

本卡过关门

☐ 闭卷用 $s = 6$ 证明 n, d, m, diam 四项; ☐ 能指着本卡图解释图画了什么、没有画什么; ☐ 能在新坐标上写出两步路; ☐ 信心自评至少 4/5, 并记录一次真实错误及发现方式。任一项失败, 回到相应小节后重做。

一天后换题: 不用本卡数字, 求 R_7 的 n, d, m , 再用一对具体格子证明直径恰为二。答案: 49, 12, 294; 可取 $(1, 1), (7, 7)$ 。

2.2 卡 52：为什么选择 $s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor$

前置知识：卡 51；预备篇“幂、根号、向下取整、不等式”。

对应交互审查卡：52（红线）

学完本卡，你应该能做到

能解释向下取整符号，并对每个 $\Delta \geq 8$ 证明 $s \geq 4$ 、 $L = \Delta - 2s + 2 \geq 2$ ；不能只试几个数。

先遮住答案，自己做

人口三问。

1. $\lfloor 5.8 \rfloor$ 与 $\lfloor 5 \rfloor$ 各是多少？错则回 Z10 “向下取整”。
2. 若 $0 < a \leq b$ ，乘以正数 3 后不等号方向怎样？错则回 Z09。
3. $8^{1/3}$ 与 $8^{2/3}$ 各是多少？错则回 Z10 “分数指数”。

答案：五和五；方向不变；二和四。

先讲人话

我们想把每个棋盘块本来的度数 $2(s-1)$ 增加到指定的最大度 Δ 。还可增加的“插座容量”是 $L = \Delta - 2(s-1)$ 。 s 太大就没有插座，太小又不能产生足够大的棋盘。 $\Delta^{2/3}$ 是后来平衡两种误差所需的中间尺度。

新词与符号

$\lfloor x \rfloor$ 读作“ x 的向下取整”，是“不超过 x 的最大整数”。例如 $\lfloor 4.9 \rfloor = 4$ 。定义

$$s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor, \quad L = \Delta - 2s + 2.$$

再讲精确

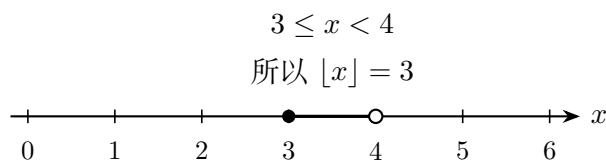
对每个实数 x ，若 $s = \lfloor x \rfloor$ ，则且只需记住

$$s \leq x < s + 1.$$

本卡取 $x = \Delta^{2/3}$ 。需要证明的是一个带全称量词的命题：

$$\text{对每个整数 } \Delta \geq 8, \quad s \geq 4 \quad \text{且} \quad L \geq 2.$$

有限张数表只能检查，不能代替这个全称证明。



怎样指着图讲：实心点表示左端三可以取到，空心点表示右端四取不到；粗线上的每个数向下取

整都为三。图只解释 floor 的两侧界，不表示 Δ 或图的度数。

为什么这一步是真的

当 $\Delta \geq 8$ 时, $\Delta^{2/3} \geq 8^{2/3} = 4$, 而四本来就是整数, 所以 $s \geq 4$ 。又因 $\Delta \geq 8$, 有 $\Delta^{1/3} \geq 2$; 两边乘正数 $\Delta^{2/3}$ 得 $\Delta \geq 2\Delta^{2/3}$ 。再用 $s \leq \Delta^{2/3}$, 得到

$$2s \leq 2\Delta^{2/3} \leq \Delta, \quad L = \Delta - 2s + 2 \geq 2.$$

每一步都对所有 $\Delta \geq 8$ 成立, 而不只是数值样本。

跟着做一遍

完整例 A: $\Delta = 27$ 。

$$\Delta^{1/3} = 3, \quad \Delta^{2/3} = 9, \quad s = \lfloor 9 \rfloor = 9.$$

rook 块本身的度数为 $r = 2(s - 1) = 16$, 可留给树边的负载为 $L = \Delta - r = 27 - 16 = 11$ 。
核对: $r + L = 16 + 11 = 27$, 而 $s \geq 4, L \geq 2$ 。

跟着做一遍

半开放例 B: $\Delta = 64$ 。

$64^{1/3} = \underline{\quad}$, 故 $64^{2/3} = \underline{\quad}$; 于是 $s = \lfloor \underline{\quad} \rfloor = \underline{\quad}$ 。接着 $r = 2(s - 1) = \underline{\quad}$, $L = 64 - r = \underline{\quad}$, 且 $r + L = \underline{\quad}$ 。

自检: 这里 64 是实际最大度目标, 不是树的顶点数; s 是棋盘边长, 不是棋盘顶点数。

Δ	$\Delta^{2/3}$	s	$r = 2(s - 1)$	$L = \Delta - r$
8	4	4	6	2
27	9	9	16	11
64	16	16	30	34

这张表承担的任务: 逐列显示 “目标最大度 $\rightarrow$ 棋盘尺度 $\rightarrow$ 块内度 $\rightarrow$ 剩余负载”。它是数值检查, 不代替对所有 $\Delta \geq 8$ 的一般证明。

最容易掉进去的坑

错误诊所。

- 错答: “ $s = \lfloor x \rfloor$, 所以 $s \geq x$ 。” 向下取整绝不会超过原数; 正确是 $s \leq x < s + 1$ 。
- 错答: “算 $\Delta = 8, 9, 10$ 都有 $L \geq 2$, 所以一般成立。” 有限样本不能证明 “对所有”。必须使用 $2s \leq 2\Delta^{2/3} \leq \Delta$ 。
- 错答: “ $L = \Delta - 2s - 2$ 。” 括号展开错了: $\Delta - 2(s - 1) = \Delta - 2s + 2$ 。

先遮住答案，自己做

L1 (两题)。(1) 求 $\Delta = 125$ 的 s, r, L 。(2) 求 $\Delta = 216$ 的 s, r, L 。

L2 (两题)。(3) 由 floor 定义证明 $s \leq \Delta^{2/3} < s+1$ 。(4) 不代具体数，从 $\Delta \geq 8$ 逐行推出 $s \geq 4$ 与 $L \geq 2$ ，每个不等号写依据。

L3。(5) 若改取 $s = \lfloor \Delta^{3/4} \rfloor$ ，为什么“留有非负负载”最终可能失败？只需比较 $2\Delta^{3/4}$ 与 Δ 的量级，不必研究完整误差。

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 4, 16, 16, 30, 34, 64。

练习答案。(1) $s = 25, r = 48, L = 77$ 。(2) $s = 36, r = 70, L = 146$ 。(3) “ s 是不超过 $x = \Delta^{2/3}$ 的最大整数”给 $s \leq x$ ；若 $x \geq s+1$ ，整数 $s+1$ 也不超过 x ，与最大性矛盾，故 $x < s+1$ 。(5) $2\Delta^{3/4}/\Delta = 2\Delta^{-1/4}$ 虽会趋零，实际上最终仍小于一，故单凭负载并不失败；这道题故意检查你是否会拒绝错误暗示。该选择的问题在误差平衡而非负载存在。能指出题干暗示错误才得满分。

六层评分示范 (第 4 题, 12 分)。

1. **定义起点 (2 分)：** $s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor$, $L = \Delta - 2s + 2$ 。
2. **下界 $s \geq 4$ (2 分)：** $\Delta \geq 8$ ，正数幂函数递增，所以 $\Delta^{2/3} \geq 4$ ；四为整数，故 floor 至少四。
3. **关键尺度 (2 分)：** $\Delta^{1/3} \geq 2$ ；乘正数 $\Delta^{2/3}$ ，得 $\Delta \geq 2\Delta^{2/3}$ 。
4. **floor 上侧 (2 分)：** $s \leq \Delta^{2/3}$ ，故 $2s \leq 2\Delta^{2/3} \leq \Delta$ 。
5. **结果 (2 分)：** $L = \Delta - 2s + 2 \geq 2$ 。
6. **错因与复核 (2 分)：**最易写反 floor；用边界 $\Delta = 8$ 得 $(s, L) = (4, 2)$ ，与一般结论吻合。

本卡过关门

☐ 闭卷证明 floor 两侧界；☐ 对未见过的 Δ 算 s, r, L ；☐ 口头解释为什么 L 是“剩余插座”；☐ 信心至少 4/5 并记录一次方向错误。红线卡四项缺一即不通过。

一天后不同数据： $\Delta = 343$ 时求 s, r, L ，再证明 $s \geq 4, L \geq 2$ 。答案： $s = 49, r = 96, L = 247$ 。

七天后迁移 (独立题面)：不看原证明，处理 $u = \lfloor N^{3/5} \rfloor$ ：写出 floor 两侧界，并给出一个明确整数阈值，使阈值以后必有 $2u \leq N$ ；不要求找最小阈值。**自校验键：** $N^{3/5} - 1 < u \leq N^{3/5}$ 。取 $N \geq 6$ 即足够，因为 $N^2 \geq 36 > 32 = 2^5$ ，所以 $N^{2/5} > 2$ ，从而 $2u \leq 2N^{3/5} < N$ 。若只试若干数值或没有把阈值后的所有 N 包住，不通过。

2.3 卡 53：怎样造任意大的、最大度恰为 L 的树

前置知识：卡 52；预备篇“树、阶、度与实际最大度”。

对应交互审查卡：53

学完本卡，你应该能做到

对任意整数 $L \geq 2$ 和 $k \geq L + 1$ ，亲手造出一棵阶为 k 、实际最大度恰为 L 的树。

先遮住答案，自己做

人口三问。

1. 树的两个条件是什么？错则回 Z07 “连通且无环”。
2. $K_{1,4}$ 有多少顶点，中心度数多少？错则回 Z06 “星图”。
3. 一棵 k 点树有多少条边？若只会背答案而不会解释，回卡 20。

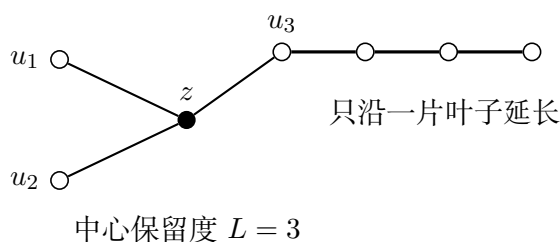
答案：连通、无环；五点、中心度四； $k - 1$ 条边。

先讲人话

先做一颗有 L 片叶子的星：中心连着 L 片叶子。若还想增加顶点，不要再往中心接，否则中心度数会超过 L ；只需选一片叶子，把它的尾巴继续拉长。

再讲精确

从星 $K_{1,L}$ 开始，它有 $L + 1$ 个顶点。若 $k > L + 1$ ，在一片叶子外依次接上 $k - (L + 1)$ 个新顶点。所得图记作 $T_{L,k}$ 。



怎样指着图讲：实心中心 z 保证“达到 L ”；细线是原星，粗线是后来延长的尾巴。所有尾巴点度数至多二，所以黑白打印时线宽仍能区分“原结构”和“新增结构”。图示的是 $L = 3$ 的模型，证明必须处理一般 L, k 。

为什么这一步是真的

每加一个新点只加一条边，图始终连通，也不会产生环，所以仍是树。原中心的度数一直是 L 。被延长的原叶子度数从一变二，新路径内部点度数至多二；因为 $L \geq 2$ ，没有点超过 L ，而中心达到 L 。因此实际最大度恰为 L 。

跟着做一遍

完整例 A: $L = 3, k = 8$ 。先画 $K_{1,3}$, 已有四点三边; 再沿叶子 u_3 接四个新点, 共八点七边。中心度三; u_3 和新增路径的前三个点度二; 另外两片旧叶与新尾端度一。度数和 $3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 14 = 2 \cdot 7$, 与七条边复核一致。图连通且每次只接一个新叶, 不会形成环, 故为树; 最大度至少三 (中心) 又至多三, 恰为三。

跟着做一遍

半开放例 B: 造 $T_{4,7}$ 。

先画 $K_{1,4}$, 它有 ____ 点和 ____ 边。为达到七点, 还需沿一片叶子接 ____ 个新点。最终边数为 ____。中心度数仍为 ____; 新增点与被延长叶子的度数至多 ____, 所以最大度恰为四。

自检: 是否同时证明了连通、无环、度数不超过四、某点达到四?

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答: “随便拿一条 k 点路径, 它最大度就是 L 。” 路径的实际最大度只有二, 只在 $L = 2$ 时可用。
2. 错答: “每加一点连到中心。” 这样中心度数会从 L 增长, 破坏固定最大度。
3. 错答: “所有度数至多 L , 所以实际最大度是 L 。” 还缺 “中心确实达到 L ” 这一半。

先遮住答案, 自己做

L1 (两题)。 (1) 造 $T_{2,9}$ 并写度数序列。 (2) 造 $T_{5,8}$ 并求边数。

L2 (两题)。 (3) 对一般 L, k , 证明构造始终是树。 (4) 证明其实际最大度恰为 L , 把 “ $\leq$ ” 与 “达到” 分开写。

L3。 (5) 证明 $L = 1$ 时连通图至多有两个顶点; 解释这正是卡 52 要保留 $L \geq 2$ 的原因。

核对答案与推理

半开放例 B。 依次填 5, 4, 2, 6, 4, 2。

练习答案。 (1) $L = 2$ 时所得图就是九点路径, 度数序列为两个一、七个二。 (2) 从六点星再延长两点, 共八点七边。 (3) 起始星连通无环; 每次给现有图加一个新点和唯一一条接边, 新点不可能产生环, 连通性保留。 (5) 若三个不同点处在同一连通分量, 连接它们的树状路径中必有一点接至少两条边; 因此最大度至少二。最大度一的连通图只能是单点或一条边。

六层评分示范 (第 4 题, 12 分)。

1. **定义起点 (2 分):** 实际最大度是全体顶点度数的最大值。
2. **分类 (2 分):** 中心、未延长叶、被延长叶/路径内部、尾端。
3. **上界 (3 分):** 中心度 L ; 其余度至多二; 因 $L \geq 2$, 所有点度至多 L 。
4. **达到 (2 分):** 中心从未再接新边但保留原来 L 条边, 故度恰为 L 。

5. **结果 (1 分)**: 最大度既不超过又至少为 L , 所以等于 L 。

6. **易错与复核 (2 分)**: 不能只写上界; 握手引理可用度数和 $2(k-1)$ 复查具体图。

本卡过关门

☐ 不看图造 $T_{5,11}$; ☐ 证明它是树; ☐ 证明最大度恰为五; ☐ 信心至少 $4/5$ 并写下一次真实错误。任一失败, 退回本卡相应段落。

一天后不同数据: 造 $T_{6,13}$, 写出新增点数、边数、度数和, 并标出达到最大度的唯一指定中心。答案: 从七点星增加六点; 十二边; 度数和二十四。

2.4 卡 54：把树根插进棋盘：实际最大度为什么正好是 Δ

前置知识：卡 18-21、51-53。

对应交互审查卡：54（红线）

学完本卡，你应该能做到

能定义 rooted rook product，并用“先证不超过、再找达到点”证明实际最大度恰为 Δ 。

先遮住答案，自己做

人口三问。

1. 一块 R_s 内每个点原有多少个邻点？错则回卡 51。
2. 卡 53 的树为何有某点度数恰为 L ？只说“至多”则回卡 53 的六层答案。
3. 若一个点原度六，又新增两条接在它身上的桥，它的新度数是多少？错则回卡 21。

答案： $2(s-1)$ ；星中心保留 L 个邻点；八。

先讲人话

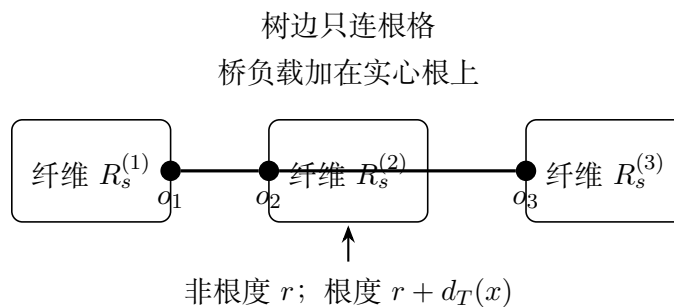
每个树顶点换成一块 rook 棋盘，并在每块选一个“根格”。树上相邻的两个位置，就把对应两块棋盘的根格连起来。根格承担所有外接电线；非根格只保留棋盘内部连接。

再讲精确

对 $T_{L,k}$ 的每个顶点放一份 R_s ，所有树边都连接对应纤维的根。所得图记作 $R_{\Delta,k}$ 。rook 内部度数 $r = 2(s-1)$ 。若树点 x 的度数为 $d_T(x)$ ，其根在乘积中的度数为

$$r + d_T(x),$$

非根点度数为 r 。



怎样指着图讲：圆角框是一整块 rook 纤维，框内实心点是选定根；粗线是树边变成的桥。图把三层对象“树点—纤维—根”压在同一页，但只画局部；一般树可以分叉，证明仍只看每个树点的度数。

为什么这一步是真的

因为树的所有度数至多 L , 所有根度数至多 $r+L = \Delta$, 非根更不超过它, 所以 $\Delta(G) \leq \Delta$ 。另一方面, 树中确有一个度数为 L 的中心; 它对应的根度数正是 $r+L = \Delta$, 所以 $\Delta(G) \geq \Delta$ 。两边合并, 实际最大度恰为 Δ 。

跟着做一遍

完整例 A: $\Delta = 8, k = 5$ 。卡 52 给 $s = 4, r = 6, L = 2$ 。取五点路径作 $T_{2,5}$: 两个端点度一, 三个内部点度二。每块有十六点。非根仍度六; 端点纤维的根度 $6+1=7$; 内部纤维的根度 $6+2=8$ 。所以所有点度至多八, 而且三个根达到八, 实际最大度恰为八。总图有 $16 \cdot 5 = 80$ 个顶点, 仍是有限图。

跟着做一遍

半开放例 B: $\Delta = 27$ 的最小树。

已有 $s = 9, r = 16, L = 11$ 。取树 $K_{1,11}$, 其阶为 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 。中心纤维的根度为 $16 + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$; 叶纤维的根度为 $16 + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$; 所有非根度为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。因此最大度上界是 $\underline{\hspace{1cm}}$, 由中心根达到。

自检: 是否把 $k = 12$ 误当成最大度? 是否明确指出“中心根”而非“某个点”?

顶点类型	原 rook 度	新增桥数	乘积中的度
非根	r	0	r
树叶对应根	r	1	$r+1$
一般树点对应根	r	$d_T(x)$	$r+d_T(x)$
最大度树点对应根	r	L	$r+L = \Delta$

表的作用: 第一、二列是度数账本; 最后一行负责“等号达到”。它不能证明 packing 数, packing 要等到卡 55 另证。

最容易掉进去的坑**错误诊所。**

1. 错答: “根度都是 $r+L$ 。”只有树中度数为 L 的点所对应根达到; 其他根为 $r+d_T(x)$ 。
2. 错答: “最大度不超过 Δ , 所以可用于 c_Δ 。” c_Δ 的候选要求实际最大度等于 Δ 。
3. 错答: “根之间的桥也给非根加度。”桥端点只有根, 非根度数仍是 r 。

先遮住答案, 自己做

L1 (两题)。(1) 对 $\Delta = 64$ 求 s, r, L , 并写非根和最大负载根的度。(2) 在完整例 A 中写出三类顶点各有多少个。

L2 (两题)。(3) 对一般参数完整证明 $\Delta(R_{\Delta,k}) = \Delta$ 。(4) 若错误地用一棵实际最大度 $L-1$ 的树, 算出乘积的实际最大度并说明它为何不是 c_Δ 的候选。

L3。(5) 解释条件 $k \geq L+1$ 是必要的“顶点数下界”: 为什么简单图中一个度 L 的点至

少需要 $L + 1$ 个顶点？

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 12, 11, 27, 1, 17, 16, 27。

练习答案。 (1) $s = 16, r = 30, L = 34$; 非根度三十, 最大负载根度六十四。(2) 五块各十五个非根, 共七十五个; 两端根两个; 内部根三个。(4) 若树实际最大度为 $L - 1$, 乘积最大度为 $r + L - 1 = \Delta - 1$, 它属于另一候选宇宙。(5) 度 L 的点必须有 L 个互异邻点, 加上自己至少 $L + 1$ 点。

六层评分示范 (第 3 题, 12 分)。

1. **定义起点 (2 分):** $r = 2(s - 1)$, $L = \Delta - r$, 树实际最大度为 L 。
2. **分类公式 (2 分):** 非根度 r ; 树点 x 对应根度 $r + d_T(x)$ 。
3. **上界 (2 分):** $d_T(x) \leq L$, 故所有根度至多 $r + L = \Delta$; 非根也不超过。
4. **达到 (2 分):** 存在 x_* 使 $d_T(x_*) = L$, 其根度为 $r + L = \Delta$ 。
5. **结论 (2 分):** 最大度既至多又至少为 Δ , 故恰等于。
6. **错因/复核 (2 分):** 必须使用实际 L ; 用例 A 的度数表复核公式。

本卡过关门

☐ 闭卷画三层对象; ☐ 分别写根/非根度公式; ☐ 用未见参数完成“上界 + 达到”; ☐ 信心至少 4/5 并记录一次把“至多”误当“恰为”的风险。红线卡缺一不通过。

一天后不同数据: $\Delta = 125$ 时 $s = 25, r = 48, L = 77$ 。取 $T_{77,80}$, 说明所有点度的上界并找达到点。答案: 非根四十八; 根至多一百二十五; 星中心对应根达到一百二十五。

七天后迁移: 不用 rook 图, 设任意纤维是 12-正则图, 树实际最大度八。证明 rooted product 的实际最大度是二十, 并指出这仍需桥只接根这一假设。

2.5 卡 55：每块恰选一个： $\rho = k$ 与 $\tau_D = (s^2 - 1)k$

前置知识：卡 03-06、22-24、51、54。

对应交互审查卡：55

学完本卡，你应该能做到

不依赖外部定理，直接证明 rooted rook product 的 packing 数恰为纤维数 k 。

先遮住答案，自己做

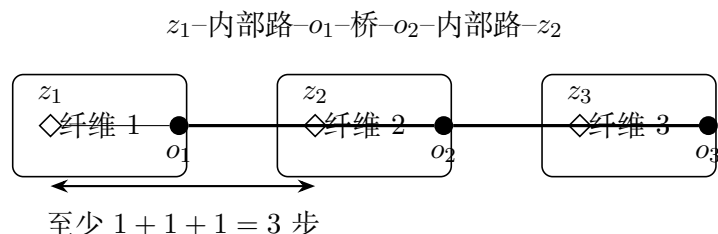
人口三问。

1. packing 中两点的距离至少几？错则回卡 03。
2. 直径二意味着同一纤维内任意两点距离至多几？错则回卡 51。
3. 若 $n = 45, \rho = 5$ ，由 $\tau_D + \rho = n$ 求 τ_D 。错则回卡 06。

答案：三；二；四十。

先讲人话

一块棋盘直径二，所以两个侦察员若在同一块，彼此太近；每块至多放一个。反过来，每块选一个不是根的格子。去别的块至少要先走到根、跨一条树边、再从对方根走到所选格子，共至少三步。



怎样指着图讲：实心圆是根，空心菱形是每块选的非根 selector，粗线是桥。任何跨块路必须经过“内部—桥—内部”三段。图把非根到根画成一条边；若实际距离为二，只会让总路更长，因此不影响“至少三”。

为什么这一步是真的

上界：每个 R_s 直径二，packing 的任意两点必须距离至少三，所以每纤维至多一点， $\rho \leq k$ 。

下界：每纤维选一非根点。任意不同纤维之间的路至少包含“非根到本根”的一条内部边、一条或更多树桥、以及“彼根到非根”的一条内部边，长度至少三。因此这 k 点形成 packing， $\rho \geq k$ 。

两边合并得 $\rho = k$ ，再由 $\tau_D + \rho = n = s^2 k$ 得 $\tau_D = (s^2 - 1)k$ 。

再讲精确

上界与下界必须分开：

$$\underbrace{\rho(R_{\Delta,k}) \leq k}_{\text{同一纤维至多一点}}, \quad \underbrace{\rho(R_{\Delta,k}) \geq k}_{\text{每纤维选一非根}}.$$

新增桥不会删除 rook 内原有的长度至多二的路，因此同一纤维两点在整个图中的距离仍至多二。不同纤维之间只有根能出入；树边均变为根间桥，故三段论证适用。

跟着做一遍

完整例 A：三块 R_3 沿路径连接。每块取根 $(1,1)$ ，selector 取 $(1,2)$ 。同一块内任何两点距离至多二，所以 packing 每块至多取一点，给 $\rho \leq 3$ 。相邻两块的两个 selector 路长恰为 1（到根）+1（桥）+1（离根）= 3；隔一块时更长。因此三个 selector 是 packing，给 $\rho \geq 3$ ，故 $\rho = 3$ 。总顶点 $n = 9 \cdot 3 = 27$ ，所以 $\tau_D = 27 - 3 = 24$ 。

跟着做一遍

半开放例 B：五块 R_4 。

同纤维内任意两点距离至多 _____，所以 $\rho \leq$ _____。每块选一非根；两个不同选择之间至少要走 _____ 条内部边、至少 _____ 条桥、再走 _____ 条内部边，总长至少 _____，故 $\rho \geq$ _____。于是 $\rho =$ _____， $n = 16 \cdot 5 = 80$ ， $\tau_D =$ _____。

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答：“每块随便选一点，包括根。”邻接纤维的两个根距离一，会立刻违反 packing。
2. 错答：“每块至多一点，所以 $\rho = k$ 。”这只给上界；还需构造 k 个可同时选择的点。
3. 错答：“新增桥可能让同块距离变大。”加边只会增加可走的路，最短距离不会变大；原 rook 两步路仍在。

先遮住答案，自己做

L1（两题）。（1） $s = 5, k = 4$ 时求 n, ρ, τ_D 。（2） $s = 2, k = 7$ 时求同三项。

L2（两题）。（3）闭卷写 packing 上界证明。（4）闭卷写 selector 下界证明，并明确“非根”的作用。

L3。（5）若两块之间不是只连根，而是还加一条 selector-selector 边，结论中的哪一方向会失效？给出最短距离。

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 2, 5, 1, 1, 1, 3, 5, 5, 75。

练习答案。（1） $n = 100, \rho = 4, \tau_D = 96$ 。（2） $n = 28, \rho = 7, \tau_D = 21$ 。（5）原来选定的 selector 集不再是 packing，故“ $\rho \geq k$ ”的这个构造失败；两个 selector 距离一。上界仍由每纤维直径二成立。

六层评分示范（第 4 题，12 分）。

1. **定义起点 (2 分)**: packing 要求不同选择之间距离至少三。
2. **构造 (2 分)**: 每个纤维选一个非根 z_i , 共 k 点。
3. **路径强制 (3 分)**: 离开首纤维必须到根, 跨至少一条根间桥, 进入末纤维后从根到非根; 三段各至少一边。
4. **距离结论 (1 分)**: 任意异块选择距离至少三, 所以集合是 packing。
5. **下界 (1 分)**: $\rho \geq k$; 与上界合并得等号。
6. **易错/复核 (3 分)**: 非根不可删; 对两相邻纤维画出三边路作最小情形核对。

本卡过关门

☐ 闭卷分别证明 $\rho \leq k$ 与 $\rho \geq k$; ☐ 能指图讲三段路; ☐ 换 s, k 求 τ_D ; ☐ 信心至少 4/5 并记录一次上下界混淆。不得用“显然每块一个”。

一天后不同数据: 六块 R_6 按一棵星形树连接, 每块根取 $(1, 1)$ 、selector 取 $(2, 3)$ 。证明 $\rho = 6$ 并求 n, τ_D 。答案: $n = 216, \tau_D = 210$; selector 到根距离二, 跨块距离反而至少五。

2.6 卡 56：从有限图算出归一化缺口 ϕ_Δ

前置知识：卡 08、25、51–55。

对应交互审查卡：56

学完本卡，你应该能做到

能把 rooted rook 的参数代入余量公式，推出有限 k 的精确人均缺口，并说清尾项来自哪里。

先遮住答案，自己做

入口三问。

1. 若余量 $\mu = -10$ 、 $\Delta = 3$ ，加性缺口是多少？错则回卡 08。
2. 一块有 q 点，共 k 块，顶点总数是多少？错则回卡 20。
3. $a_k = b + 2/k$ 中，有限 k 时能否直接删掉 $2/k$ ？错则回 Z11。

答案： $10/(3^2 + 1) = 1$ ； qk ；不能。

先讲人话

把每块棋盘看成一栋有 s^2 个房间的楼，共有 k 栋。余量公式先给整座小区的总账；负余量换成正缺口后，还要除以所有房间数 s^2k ，才是“每个房间平均错多少”。账本末尾固定的 -2 会变成一个含 $1/k$ 的正尾项：楼越多，它平均到每个房间越小，但任何有限楼数都不等于零。

新词与符号

定义

$$\phi_\Delta = \frac{\Delta - 2s + 3}{\Delta^2 + 1} - \frac{\Delta^2 + 3}{(\Delta^2 + 1)s^2}.$$

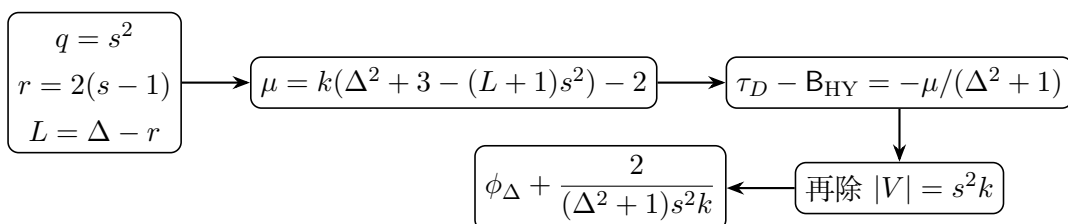
希腊字母 ϕ 读作“菲”。它是让纤维数 k 越来越大时，人均缺口逼近的数。

再讲精确

对每个固定整数 $\Delta \geq 8$ 、由卡 52 定义的 s, L ，以及每个有限整数 $k \geq L + 1$ ，都有精确等式

$$\frac{\tau_D(R_{\Delta,k}) - \text{B}_{\text{HY}}(R_{\Delta,k})}{|V(R_{\Delta,k})|} = \phi_\Delta + \frac{2}{(\Delta^2 + 1)s^2k}.$$

左边属于一张具体有限图；右边第一项只依赖 Δ ，第二项还依赖 k 。等式不包含“约等于”。



怎样指着图讲：这是公式流水账，不是新定理。每个箭头只做一次动作：代参数、余量变缺口、除以顶点数、拆出主体与尾项。黑白框的位置顺序承担信息，不依赖颜色。

为什么这一步是真的

loaded-tree 公式取 $q = s^2$ 、 $r = 2(s - 1)$ 、 $L = \Delta - r$ ：

$$\mu = k(\Delta^2 + 3 - (L + 1)s^2) - 2.$$

缺口等于 $-\mu/(\Delta^2 + 1)$ ，再除以顶点数 s^2k ：

$$\begin{aligned}\frac{\tau_D - B_{HY}}{|V|} &= \frac{(L + 1)s^2 - \Delta^2 - 3}{(\Delta^2 + 1)s^2} + \frac{2}{(\Delta^2 + 1)s^2k} \\ &= \phi_\Delta + \frac{2}{(\Delta^2 + 1)s^2k},\end{aligned}$$

因为 $L + 1 = \Delta - 2s + 3$ 。最后一项来自总余量中的常数 -2 ；它随 k 增大而趋于零，但对任何有限 k 都不能擅自删除。

跟着做一遍

完整例 A： $\Delta = 27, k = 12$ 。先有 $s = 9, L = 11$ 。主体为

$$\phi_{27} = \frac{12}{730} - \frac{732}{730 \cdot 81} = \frac{8}{1971}.$$

因为 $k = 12$ 是有限数，实际人均缺口为

$$\frac{8}{1971} + \frac{2}{730 \cdot 81 \cdot 12} = \frac{8}{1971} + \frac{1}{354780}.$$

第二项为正且没有消失。它的分母包含 k ，所以当纤维数增大时才逐渐变小。

跟着做一遍

半开放例 B： $\Delta = 64, k = 35$ 。

$s = 16, L = 34$ ，所以 $L + 1 = \underline{\hspace{1cm}}$ 。主体

$$\phi_{64} = \frac{\hspace{1cm}}{4097} - \frac{\hspace{1cm}}{4097 \cdot 256} = \frac{\hspace{1cm}}{4097 \cdot 256}.$$

有限尾项是 $2/(4097 \cdot \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}})$ 。

自检：第一个空应是 $L + 1$ ，第二个大分子是 $\Delta^2 + 3$ ；分母中的 256 是每纤维顶点数，不是纤维数。

层级	精确量	有限 k 是否保留
总余量	$k(\Delta^2 + 3 - (L + 1)s^2) - 2$	保留 -2
总缺口	$-\mu/(\Delta^2 + 1)$	保留 $+2/(\Delta^2 + 1)$
人均缺口	$\phi_\Delta + 2/((\Delta^2 + 1)s^2k)$	保留整个尾项
$k \rightarrow \infty$ 的数值极限	ϕ_Δ	此时尾项才趋零

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答：“ k 很大，所以尾项等于零。”有限的正数分母给出的仍是正数，只能说小，不能说零。
2. 错答：“ ϕ_Δ 是某张无限图的 gap。”本论文只在有限图上定义参数； ϕ_Δ 是一列有限图数值的极限。
3. 错答：“把总缺口除以 k 就是人均。”每块有 s^2 点，必须除以 s^2k 。

先遮住答案，自己做

L1 (两题)。(1) 在 $\Delta = 8, s = 4$ 时求 ϕ_8 。(2) 在完整例 A 中把 k 改成 24，写出新尾项并比较大小。

L2 (两题)。(3) 从 loaded-tree 余量逐行推导有限 k 人均式，不许跳过负号与两次除法。(4) $\Delta = 125, s = 25, k = 78$ 时写出 ϕ_{125} 与有限尾项，不要求小数化。

L3。(5) 对固定 Δ ，本族有限候选值随 k 增大从 ϕ_Δ 的上方还是下方接近？这能否说明 c_Δ 被某张本族图取到？

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 35, 35, 4099, 4861, 256, 35，所以 $\phi_{64} = 4861/(4097 \cdot 256)$ ，尾项为 $2/(4097 \cdot 256 \cdot 35)$ 。

练习答案。(1) $\phi_8 = 3/65 - 67/1040 = -19/1040$ ；下界在小度数为负并不矛盾。(2) 尾项变为 $1/(709560)$ ，恰为 $k = 12$ 时的一半。(4) $L + 1 = 78$ ，故

$$\phi_{125} = \frac{78}{15626} - \frac{15628}{15626 \cdot 625}, \quad \text{尾项} = \frac{2}{15626 \cdot 625 \cdot 78}.$$

(5) 尾项为正并随 k 增大而减小，故从上方接近；这不能说明 c_Δ 由本族某图取到，因为 c_Δ 还对所有合法图取上确界。

六层评分示范 (第 3 题, 14 分)。

1. **定义起点 (2 分)：** $q = s^2, r = 2(s - 1), L = \Delta - r$ ，且余量式已由卡 25 证明。
2. **代入余量 (2 分)：** $\mu = k(\Delta^2 + 3 - (L + 1)s^2) - 2$ 。
3. **余量变总缺口 (3 分)：** $\tau_D - B_{HY} = -\mu/(\Delta^2 + 1)$ ，负号使 -2 变 $+2$ 。
4. **总量变人均 (3 分)：**再除 $|V| = s^2k$ ，逐项约掉第一项的 k 。
5. **拆分 (2 分)：**用 $L + 1 = \Delta - 2s + 3$ 得 ϕ_Δ 加正尾项。
6. **错因/复核 (2 分)：**检查有限 k 仍有尾项；用量纲表核对总量与人均量。

本卡过关门

☐ 闭卷画公式流水账；☐ 对新参数保留有限尾项；☐ 口头区分总余量/总缺口/人均缺口；☐ 信心至少 4/5 并记录一次漏除 s^2 的风险。任何一步用“整理可得”跳过负号，不通过。

一天后不同数据： $\Delta = 216, s = 36, L = 146, k = 147$ ，写出 ϕ_{216} 和完整有限尾项。答案：

$$\phi_{216} = \frac{147}{46657} - \frac{46659}{46657 \cdot 1296}, \quad \text{尾项} = \frac{2}{46657 \cdot 1296 \cdot 147}.$$

2.7 卡 57：上确界可以接住极限，却不要求取到极限

前置知识：卡 42、56；预备篇“数列、极限、上确界”。

对应交互审查卡：57（红线）

学完本卡，你应该能做到

能用有限图序列严格推出 $c_\Delta \geq \phi_\Delta$ ，同时不虚构 $k = \infty$ 的图，也不声称某张图取到 ϕ_Δ 。

先遮住答案，自己做

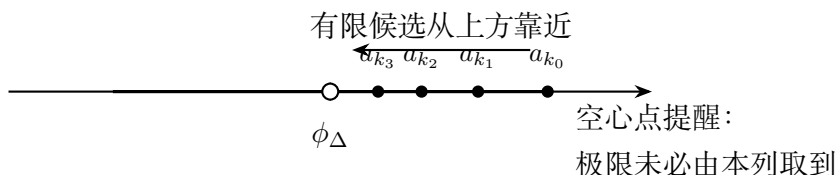
入口三问。

1. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 的 maximum 和 supremum 各是什么？错则回 Z12。
2. 数列 $1 - 1/k$ 的每一项是否小于一？它是否趋于一？错则回 Z11。
3. 卡 56 的每个 $R_{\Delta,k}$ 是有限图还是无限图？若答“ $k \rightarrow \infty$ 就是无限图”，回卡 56 的边界表。

答案：都为三；是、是；每个允许的 k 都给一张有限图。

先讲人话

想象一串合法成绩越来越靠近某个高度。若 c_Δ 是所有候选值的天花板，那么天花板不能低于它们逼近的高度；候选可以从上方或下方靠近，也未必有一个候选恰好等于那个极限。



怎样指着图讲：每个实心点 a_k 都来自一张合法有限图；空心点标出它们趋向的数 ϕ_Δ ，不代表存在“第无穷张图”。本族因尾项为正而从上方靠近；上确界论证同样适用于从下方逼近的数列。

再讲精确

固定 $\Delta \geq 8$ 。对每个 $k \geq L + 1$ ， $R_{\Delta,k}$ 都是有限、连通、实际最大度恰为 Δ 的合法候选，因此

$$c_\Delta \geq \phi_\Delta + \frac{2}{(\Delta^2 + 1)s^2k}.$$

这里尾项为正，所以每个有限 k 其实已经给出 $c_\Delta > \phi_\Delta$ ，从而当然有 $c_\Delta \geq \phi_\Delta$ 。更一般地，即使候选值从下方逼近，“所有候选的共同上界不低于它们的极限”也会给出同样结论。写 $k \rightarrow \infty$ 只是在记录这列有限图的人均值趋向哪里，不是在制造一张“ $k = \infty$ 的图”。

为什么这一步是真的

若反设 $c_\Delta < \phi_\Delta$ ，任选一个允许的有限 k ，本族候选值 $\phi_\Delta + 2/((\Delta^2 + 1)s^2k)$ 已经严格大于 ϕ_Δ ，更大于 c_Δ ，与 c_Δ 是所有候选值的上界矛盾。证明只使用有限图。

跟着做一遍

完整例 A：上确界不必取到。令 $S = \{1 - 1/k : k = 1, 2, 3, \dots\}$ 。每项都小于一，所以一是上界。若 $u < 1$ ，取正整数 $k > 1/(1-u)$ ，则 $1/k < 1-u$ ，从而 $1 - 1/k > u$ ；故任何小于一的数都不是上界。一是最小上界，即 $\sup S = 1$ ，但没有有限 k 使 $1 - 1/k = 1$ 。

跟着做一遍

半开放例 B：从上方靠近也可以。令 $a_k = 2 + 3/k$ ，只取 $k \geq 4$ 。每项来自一个“合法候选”。

$a_4 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $a_{12} = \underline{\hspace{1cm}}$ ，且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \underline{\hspace{1cm}}$ 。候选集合的上确界其实由 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 取到，等于 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，但仍有 $\sup\{a_k\} \geq \lim a_k$ 。

自检：“极限二”不是本集合的 supremum；本卡只使用“总上确界不低于任一子列极限”，没有把二误叫成该子列最大值。

对象	它是什么	本卡允许说什么
$R_{\Delta,k}$	一张有限、连通、实际最大度 Δ 的图	对每个有限允许 k 都是 c_Δ 候选
a_k	该有限图的人均缺口	$c_\Delta \geq a_k$
ϕ_Δ	数列 a_k 的极限值	$c_\Delta \geq \phi_\Delta$ ；不声称取到
c_Δ	全体合法有限图候选值的上确界	可能是最大值，也可能不是

最容易掉进去的坑**错误诊所。**

- 错答：“令 $k = \infty$ ，得到一张图。”无穷不是这里允许的整数参数；只有一列有限图及其数值极限。
- 错答：“极限就是 supremum。”例 B 的极限为二，子列 supremum 为 11/4，二者不同。
- 错答：“ $c_\Delta \geq \phi_\Delta$ ，所以某张图达到 ϕ_Δ 。”上确界不承诺取到；而当前本族有限值还都严格大于 ϕ_Δ 。

先遮住答案，自己做

L1 (两题)。(1) 求 $\{3 - 2/k : k \geq 1\}$ 的 supremum，并判断取到否。(2) 求 $\{1 + 1/k : k \geq 5\}$ 的 supremum 与极限，区分二者。

L2 (两题)。(3) 只用“ c_Δ 是共同上界”和极限定义，证明若 $a_k \rightarrow \ell$ ，则 $c_\Delta \geq \ell$ 。(4) 用卡 56 的正尾项给出一条更短证明：任选一个允许 k 即推出 $c_\Delta > \phi_\Delta$ 。

L3。(5) 解释为什么“构造任意大的有限图”与“构造一张无限图”是两件完全不同的事；指出本文的 τ_D, B_{HY}, c_Δ 定义在哪一类对象上使用。

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 $11/4, 9/4, 2, 4, 11/4$ 。

练习答案。(1) supremum 为三, 不取到。(2) supremum 为 $6/5$, 由 $k = 5$ 取到; 极限为一。(4) 由 $a_k = \phi_\Delta + 2/((\Delta^2 + 1)s^2k) > \phi_\Delta$ 与 $c_\Delta \geq a_k$, 立刻得 $c_\Delta > \phi_\Delta$ 。论文写极限形式, 是为了展示主体 ϕ_Δ 的来历和可推广的逻辑。(5) 每个有限 k 都给有限顶点集; “任意大”指没有统一有限上界, 不指存在一个含无限顶点的成员。本文参数均在有限简单图上使用。

六层评分示范 (第 3 题, 14 分)。

1. **对象 (2 分):** a_k 是合法候选值, 故对每个 k 有 $a_k \leq c_\Delta$ 。
2. **反设 (2 分):** 假设 $c_\Delta < \ell$, 令 $\varepsilon = (\ell - c_\Delta)/2 > 0$ 。
3. **使用极限 (3 分):** 由 $a_k \rightarrow \ell$, 存在 K , 使 $k \geq K$ 时 $|a_k - \ell| < \varepsilon$ 。
4. **矛盾 (3 分):** 于是 $a_k > \ell - \varepsilon = (\ell + c_\Delta)/2 > c_\Delta$, 与上界性矛盾。
5. **结论 (2 分):** $c_\Delta \geq \ell$; 全程只选了有限 $k \geq K$ 。
6. **易错/复核 (2 分):** 未声称 $a_k = \ell$; 用 $1 - 1/k$ 检验 “趋近但不取到”。

本卡过关门

☐ 闭卷完成 ε 反证; ☐ 指着数轴区分 maximum/supremum/limit; ☐ 明确所有图有限; ☐ 信心至少 $4/5$ 并记录一次 “极限等于取到” 的错觉。红线卡缺一不通过。

一天后不同数据: 研究 $b_j = 5 - 4/j$ 。证明任何共同上界 U 都满足 $U \geq 5$, 但没有有限 j 使 $b_j = 5$ 。

七天后迁移: 设一系列合法图的候选值为 $7 + 1/k$ 。分别写出该子列的极限、maximum 与 supremum, 再说明全体图的 c_Δ 至少是多少。答案: 极限七; 若 $k \geq 1$, 最大/上确界八; 全体上确界至少八, 因此当然至少七。

2.8 卡 58：精确误差恒等式：先精确，再估计

前置知识：卡 56、57；预备篇“通分与展开”。

对应交互审查卡：58

学完本卡，你应该能做到

能从 ϕ_Δ 逐项化简出 $1 - \Delta\phi_\Delta$ 的两项正数表达式，并用代数或数值双重核对。

先遮住答案，自己做

人口三问。

1. $1 - (A - B)$ 等于 $1 - A - B$ 还是 $1 - A + B$ ？错则回 Z02。

2. 把 1 通分到分母 $\Delta^2 + 1$ ，分子是什么？错则回 Z02 “通分”。

3. “恒等式”与“近似式”有何区别？错则回 Z11。

答案： $1 - A + B$ ； $\Delta^2 + 1$ ；恒等式对每个允许值完全相等，近似式只描述接近程度。

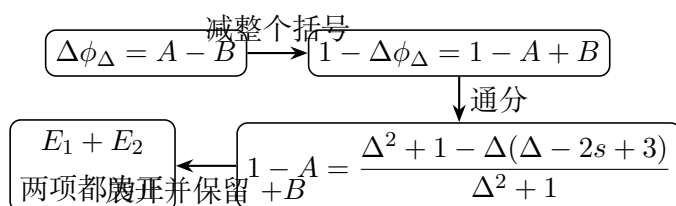
先讲人话

上一卡把目标数写成 $\Delta\phi_\Delta$ 。要判断它离一有多远，最稳的方法不是凭小数看起来像，而是做一张“差额发票”：用一减去它，并把差额拆成两笔都为正的支出。下一卡只需分别压小这两笔。

再讲精确

要证明 $\Delta\phi_\Delta$ 接近一，直接研究它与一的差：

$$1 - \Delta\phi_\Delta = \frac{\Delta(2s - 3) + 1}{\Delta^2 + 1} + \frac{\Delta(\Delta^2 + 3)}{(\Delta^2 + 1)s^2}. \quad (2.1)$$



怎样指着图讲：公式流把最危险的负号单独放进第一箭头；最后的 E_1, E_2 正是卡 59 要分别估计的“两袋误差”。图只编码代数顺序，不能代替逐行展开。

为什么这一步是真的

由定义

$$\Delta\phi_\Delta = \frac{\Delta(\Delta - 2s + 3)}{\Delta^2 + 1} - \frac{\Delta(\Delta^2 + 3)}{(\Delta^2 + 1)s^2}.$$

因此第一部分的差是

$$1 - \frac{\Delta(\Delta - 2s + 3)}{\Delta^2 + 1} = \frac{\Delta^2 + 1 - \Delta^2 + 2\Delta s - 3\Delta}{\Delta^2 + 1} = \frac{\Delta(2s - 3) + 1}{\Delta^2 + 1},$$

第二个原本被减去的量，在“ $1 - \Delta\phi$ ”中变成加号。两项分子分母均正。

跟着做一遍

完整例 A: $\Delta = 27, s = 9$ 。由卡 56, $\phi_{27} = 8/1971$, 故左边

$$1 - 27\phi_{27} = 1 - \frac{216}{1971} = \frac{1755}{1971} = \frac{65}{73}.$$

右边第一项为 $(27 \cdot 15 + 1)/730 = 406/730$, 第二项为 $27 \cdot 732/(730 \cdot 81) = 244/730$, 相加 $650/730 = 65/73$ 。两条路线一致。数值仍较大只说明有限度数时界较粗, 不影响恒等式正确。

跟着做一遍

半开放例 B: $\Delta = 64, s = 16$ 。

第一项分子为 $64(2 \cdot 16 - 3) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$; 第一项是 $\underline{\hspace{2cm}}/4097$ 。第二项

$$\frac{64(64^2 + 3)}{4097 \cdot 16^2} = \frac{\underline{\hspace{2cm}}}{4 \cdot 4097}.$$

通分后右边为 $\underline{\hspace{2cm}}/(4 \cdot 4097)$ 。

自检: 是否把 $64/16^2$ 化成 $1/4$? 第二项在误差式中应为加号。

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答: “ $1 - (A - B) = 1 - A - B$ 。” 减号作用于整个括号, $-(-B) = +B$ 。
2. 错答: “ $1 = \Delta^2/(\Delta^2 + 1)$ 。” 分子少一; 正确是 $(\Delta^2 + 1)/(\Delta^2 + 1)$ 。
3. 错答: “两项小, 所以恒等式只近似成立。” 等号是逐项代数得到, 对每个 $\Delta \geq 8$ 精确成立; 小不小是下一卡的问题。

先遮住答案, 自己做

L1 (两题)。(1) 用 $\Delta = 8, s = 4$ 算误差式右边。(2) 在纸上写出 $1 - (A - B)$ 的三个数值例, 训练负号。

L2 (两题)。(3) 从 ϕ_Δ 定义逐行推导误差恒等式。(4) 用 $\Delta = 64, s = 16$ 分别计算左、右两边, 完成独立复核。

L3。(5) 为什么研究 $1 - \Delta\phi_\Delta$ 而不是直接说 “ $\Delta\phi_\Delta$ 看起来接近一”? 列出精确误差带来的两个好处。

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 1857, 1857, 4099, 11527。

练习答案。(1) 第一项 $41/65$, 第二项 $67/130$, 合为 $149/130$ 。误差可以大于一, 因为此时 $\phi_8 < 0$ 。(2) 例如 $1 - (5 - 2) = -2$, $1 - (3 - 7) = 5$, $1 - (1/2 - 1/3) = 5/6$ 。(5) 它把目标“趋于一”改写成“正误差趋于零”, 并把误差拆成可分别估计的两项; 同时能检查正负号。

第 3 题完整推导：

$$\begin{aligned}
 1 - \Delta\phi_{\Delta} &= 1 - \frac{\Delta(\Delta - 2s + 3)}{\Delta^2 + 1} + \frac{\Delta(\Delta^2 + 3)}{(\Delta^2 + 1)s^2} \\
 &= \frac{\Delta(2s - 3) + 1}{\Delta^2 + 1} + \frac{\Delta(\Delta^2 + 3)}{(\Delta^2 + 1)s^2}.
 \end{aligned}$$

第 4 题复核：当 $\Delta = 64, s = 16$ 时，右边为

$$\frac{1857}{4097} + \frac{4099}{4 \cdot 4097} = \frac{11527}{16388}.$$

直接由 $\phi_{64} = 35/4097 - 4099/(4097 \cdot 256)$ 计算左边，也得到 $11527/16388$ 。**L3：**精确恒等式两边对每个允许参数完全相等；上界只说一边不超过另一数，可能损失信息。

六层评分（第 3 题，14 分）：定义抄准 2 分；乘 Δ 2 分；外层负号正确 3 分；把一通分为 $(\Delta^2 + 1)/(\Delta^2 + 1)$ 2 分；展开第一分子 2 分；写出两项正性与一次数值复核 3 分。漏掉任一负号最多得七分。

本卡过关门

☐ 闭卷写完整通分；☐ 指着公式流说出负号翻转；☐ 用新数值双路线复核；☐ 信心至少 4/5 并记录一次最易漏的 +1。只背终式不通过。

一天后不同数据：取 $\Delta = 125, s = 25$ ，只根据精确恒等式写出两项（可不约分），并证明它们都为正。答案：

$$\frac{125 \cdot 47 + 1}{15626} + \frac{125 \cdot 15628}{15626 \cdot 625}.$$

2.9 卡 59：把误差压到 $6\Delta^{-1/3}$ 以下

前置知识：卡 52、57、58；预备篇“不等式方向与分数指数”。

对应交互审查卡：59（红线）

学完本卡，你应该能做到

能逐步证明

$$0 < 1 - \Delta\phi_\Delta < 6\Delta^{-1/3},$$

并明确每个严格或非严格不等号的来源。

先遮住答案，自己做

人口三问。

1. 正分母交叉相乘是否改变不等号方向？错则回 Z09。
2. $s = [x]$ 给出的两侧界是什么？错则回卡 52。
3. 若 $0 < a_n < b_n$ 且 $b_n \rightarrow 0$ ，能推出什么？错则回 Z11 “夹逼到零”。

答案：不改变； $s \leq x < s + 1$ ； $a_n \rightarrow 0$ 。

先讲人话

精确误差有两袋。第一袋大约像 $2s/\Delta$ ，第二袋大约像 $2\Delta/s^2$ 。选择 $s \approx \Delta^{2/3}$ 后，两袋都约为 $\Delta^{-1/3}$ ，总量就会趋于零。

再讲精确

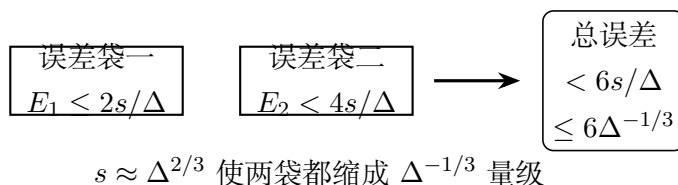
令

$$E_1 = \frac{\Delta(2s-3)+1}{\Delta^2+1}, \quad E_2 = \frac{\Delta(\Delta^2+3)}{(\Delta^2+1)s^2}.$$

卡 58 给 $1 - \Delta\phi_\Delta = E_1 + E_2$ 。本卡的目标不是求 E_1, E_2 的精确最大值，而是对每个整数 $\Delta \geq 8$ 建立统一链

$$0 < E_1 + E_2 < \frac{6s}{\Delta} \leq 6\Delta^{-1/3}.$$

严格号和非严格号不得互换；最终右端随 Δ 增大趋于零。



怎样指着图讲：两个矩形分别对应卡 58 精确恒等式的两项；箭头右侧只是上界，不是等号。图把“分别估计、最后相加”的顺序固定下来，不能把 $2 + 4 = 6$ 反推成每袋都达到其上界。

为什么这一步是真的

第一项满足

$$\frac{\Delta(2s-3)+1}{\Delta^2+1} \leq \frac{2s}{\Delta}.$$

所有分母都正。交叉相乘后，把左边移到右边，分子差为

$$2s(\Delta^2+1) - \Delta(\Delta(2s-3)+1) = 3\Delta^2 - \Delta + 2s > 0,$$

所以该不等式成立；这里没有隐藏“显然”。

由 $s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor$ 得 $s+1 > \Delta^{2/3}$ ，所以 $\Delta^2 < (s+1)^3$ 。又因 $s \geq 4$ ， $(s+1)^3 < 2s^3$ ，故 $\Delta^2 < 2s^3$ 。下面所需不等式可直接交叉相乘核对：因为 $s, \Delta > 0$ ，

$$\frac{2\Delta}{s^2} < \frac{4s}{\Delta} \iff 2\Delta^2 < 4s^3,$$

而最后一个不等式正由 $\Delta^2 < 2s^3$ 得到。同时 $(\Delta^2+3)/(\Delta^2+1) < 2$ ，故第二项

$$\frac{\Delta(\Delta^2+3)}{(\Delta^2+1)s^2} < \frac{2\Delta}{s^2} < \frac{4s}{\Delta}.$$

两项相加小于 $6s/\Delta$ ；再用 $s \leq \Delta^{2/3}$ 得 $6s/\Delta \leq 6\Delta^{-1/3}$ 。

跟着做一遍

完整例 A： $\Delta = 1000$ 的量级检查。此时 $s = \lfloor 1000^{2/3} \rfloor = 100$ 。精确误差两项为

$$E_1 = \frac{1000 \cdot 197 + 1}{1000001} \approx 0.1970, \quad E_2 = \frac{1000 \cdot 1000003}{1000001 \cdot 10000} \approx 0.1000.$$

总误差约 0.2970。通用上界为 $6\Delta^{-1/3} = 6/10 = 0.6$ ，确实更粗但有效。数值例只负责检查方向；一般证明仍靠不等式链。

跟着做一遍

半开放例 B： 补完第二袋的压界。

floor 下侧给 $\Delta^{2/3} < s+1$ ，立方后 $\Delta^2 < \underline{\hspace{1cm}}$ 。当 $s \geq 4$ 时， $(s+1)^3 < \underline{\hspace{1cm}}$ ，所以 $\Delta^2 < \underline{\hspace{1cm}}$ 。又 $(\Delta^2+3)/(\Delta^2+1) < \underline{\hspace{1cm}}$ ，从而

$$E_2 < \frac{2\Delta}{s^2} < \frac{\underline{\hspace{1cm}}s}{\Delta}.$$

最后一个严格不等号交叉相乘后等价于 $2\Delta^2 < \underline{\hspace{1cm}}s^3$ 。

步骤	使用的事实	不等号性质
$E_1 \leq 2s/\Delta$	正分母交叉相乘	可核对分子差为正
$\Delta^2 < (s+1)^3$	floor 的严格下侧	严格
$(s+1)^3 < 2s^3$	$s \geq 4$	严格
$E_2 < 2\Delta/s^2$	比值 < 2	严格
$2\Delta/s^2 < 4s/\Delta$	$\Delta^2 < 2s^3$	严格
$6s/\Delta \leq 6\Delta^{-1/3}$	floor 的上侧	可取等

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答：“ $s \leq \Delta^{2/3}$ ，所以 $1/s^2 \leq \Delta^{-4/3}$ 。”对正数取倒数应反向；第二袋必须改用另一侧 $\Delta^{2/3} < s+1$ 。
2. 错答：“两项各小于 $6\Delta^{-1/3}$ ，所以总和也小于六倍。”这样只能得十二倍；本证明分别给系数二和四。
3. 错答：“上界在 $\Delta = 8$ 大于一，所以无效。”上界可以粗；只要对所有大 Δ 成立并趋零，就足以证明极限。

先遮住答案，自己做

L1 (两题)。(1) 用 $(1+1/s)^3 \leq (5/4)^3 < 2$ 证明 $s \geq 4$ 时 $(s+1)^3 < 2s^3$ 。(2) 直接交叉相乘证明 $E_1 \leq 2s/\Delta$ 。

L2 (两题)。(3) 给本卡整条不等式链的每个箭头贴上“floor 上侧/下侧、正分母、 $s \geq 4$ 、比值小于二”之一。(4) 若暂时选一般尺度 $s \approx \Delta^a$ ，写出两袋的大致幂次 Δ^{a-1} 与 Δ^{1-2a} 。

L3。(5) 令两项幂次相同，解出 a ；解释为什么这预告了 $2/3$ ，但不代替包含 floor 和常数六的严格证明。

核对答案与推理

半开放例 B。依次填 $(s+1)^3, 2s^3, 2s^3, 2, 4, 4$ 。

练习答案。(1) $s \geq 4$ 给 $1+1/s \leq 5/4$ ，立方保持方向，且 $125/64 < 2$ ；乘正数 s^3 得结论。(2) 交叉相乘后的右减左为 $3\Delta^2 - \Delta + 2s > 0$ 。(4) 第一袋约为 $s/\Delta = \Delta^{a-1}$ ；第二袋约为 $\Delta/s^2 = \Delta^{1-2a}$ 。(5) 令 $a-1 = 1-2a$ ，得 $3a = 2$ ，即 $a = 2/3$ 。它只确定量级平衡；floor 带来的 $s+1$ 、有限起点 $s \geq 4$ 和常数六仍需严格处理。

六层评分示范 (第 3 题, 16 分)。

1. **精确起点 (2 分)：**写 $1 - \Delta\phi_\Delta = E_1 + E_2$ 且两项正。
2. **第一袋 (3 分)：**正分母交叉相乘，得 $E_1 \leq 2s/\Delta$ 。
3. **floor 下侧 (3 分)：** $\Delta^{2/3} < s+1$ ，故 $\Delta^2 < (s+1)^3 < 2s^3$ 。
4. **第二袋 (3 分)：**比值小于二，再正分母交叉相乘，得 $E_2 < 4s/\Delta$ 。

5. 合并与上侧 (3 分): $E_1 + E_2 < 6s/\Delta \leq 6\Delta^{-1/3}$ 。

6. 错因/边界 (2 分): 说明倒数方向; 指出有限处界粗不妨碍趋零。

本卡过关门

☐ 闭卷重建两袋压界; ☐ 每箭头说出依据; ☐ 用一般 a 解释为何平衡在 $2/3$; ☐ 信心至少 $4/5$ 并记录一次倒数方向错误。红线卡缺一不通过。

一天后不同数据: $\Delta = 512$ 时 $s = 64$ 。写出两项精确误差, 并验证通用上界为 $6/8 = 3/4$; 不准用小数冒充一般证明。

七天后迁移: 只给你 $s \leq \Delta^{2/3} < s+1$ 与 $s \geq 4$, 从零重建 $\Delta^2 < 2s^3$, 再推 $2\Delta/s^2 < 4s/\Delta$ 。每次乘除都标正性。

2.10 卡 60：夹逼得到精确首阶常数，而不是完整答案

前置知识：卡 50、57、59；预备篇“liminf、limsup 与夹逼”。

对应交互审查卡：60（红线）

学完本卡，你应该能做到

能把下界和上界合成 $\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_{\Delta} = 1$ ，并准确说明论文没有解决的二阶问题。

先遮住答案，自己做

人口三问。

1. 若 $x_n \geq 1 - 1/n$ ，能否单独推出 $x_n \rightarrow 1$ ？错则回 Z11：还需要上界。
2. liminf 与 limsup 谁一定不大于谁？错则回 Z12。
3. 卡 50 给出的方向是 $\limsup \Delta c_{\Delta} \leq 1$ 还是相反？错则回卡 50 结尾。

答案：不能； $\liminf \leq \limsup$ ；前者。

再讲精确

由卡 57、59，

$$c_{\Delta} \geq \phi_{\Delta} > \frac{1}{\Delta} - 6\Delta^{-4/3},$$

所以

$$\liminf_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_{\Delta} \geq 1.$$

卡 50 给出 $\limsup_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_{\Delta} \leq 1$ 。下极限不低于一，上极限不高于一，只能二者都等于一。为把最后一句写成真正证明，令 $a_{\Delta} = \Delta c_{\Delta}$ ，并按 Z13 记

$$p_N = \inf_{\Delta \geq N} a_{\Delta}, \quad q_N = \sup_{\Delta \geq N} a_{\Delta}.$$

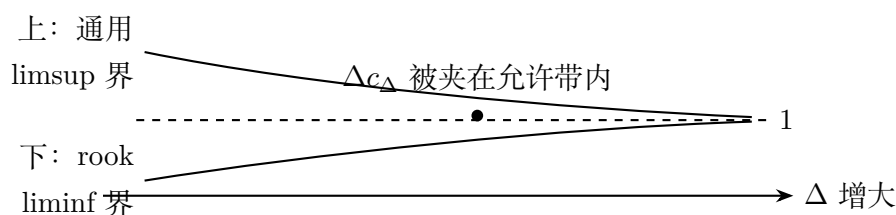
任给 $\varepsilon > 0$ ，由于 $p_N \rightarrow 1$ 、 $q_N \rightarrow 1$ ，可选 N 使 $p_N > 1 - \varepsilon$ 且 $q_N < 1 + \varepsilon$ 。于是对每个整数 $\Delta \geq N$ ，

$$1 - \varepsilon < p_N \leq a_{\Delta} \leq q_N < 1 + \varepsilon.$$

这正是 $a_{\Delta} \rightarrow 1$ ，所以普通极限存在并等于一。

先讲人话

下面的地板慢慢升到一，上面的天花板慢慢降到一；夹在中间的量无处可去，只能也靠近一。



怎样指着图讲：上、下实线表示两条证明出来的渐近边界，虚线是一；中间黑点只代表某个度数的数值，不是一张无限图。图说明夹逼方向，不声称边界曲线是 Δc_Δ 的精确公式。

为什么这一步是真的

选择 $s \approx \Delta^{2/3}$ 是在平衡 s/Δ 与 Δ/s^2 ：令二者量级相同，得到 $s^3 \approx \Delta^2$ ，即 $s \approx \Delta^{2/3}$ 。这证明本构造达到正确的首阶常数一。

跟着做一遍

完整例 A：先看普通数列夹逼。若对所有 n 都有

$$1 - \frac{4}{\sqrt{n}} \leq x_n \leq 1 + \frac{2}{n},$$

则左边与右边都趋于 1。任给 $\varepsilon > 0$ ，当

$$n > \max\{(8/\varepsilon)^2, 4/\varepsilon\}$$

时， $4/\sqrt{n} < \varepsilon/2$ 且 $2/n < \varepsilon/2$ ，于是 $1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon$ ，故 $x_n \rightarrow 1$ 。论文的做法相同，只是下界先以 $\liminf$ 、上界以 $\limsup$ 表述。

跟着做一遍

半开放例 B：补完论文的六步链。

1. 每个 $R_{\Delta,k}$ 是_____图，且实际最大度_____ Δ 。
2. 上确界给 $c_\Delta \geq$ _____。
3. 误差界给 $\Delta\phi_\Delta >$ _____。
4. 因此 $\liminf \Delta c_\Delta \geq$ _____。
5. 卡 50 给 $\limsup \Delta c_\Delta \leq$ _____。
6. 因 $\liminf$ 不超过 $\limsup$ ，二者只能都等于_____，普通极限存在。

本章已经证明	本章没有证明
$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_\Delta = 1$	每个固定 Δ 都有 $c_\Delta = 1/\Delta$
$c_\Delta \sim 1/\Delta$ (精确首阶)	完整二阶展开或最优误差指数
rook 构造给出匹配首阶下界	rook 构造对每个固定度都极值
每个参与定义的图都是有限图	存在一张“ $\Delta = \infty$ ”或“ $k = \infty$ ”的图

学术边界

结论是 $c_\Delta \sim 1/\Delta$ ，即首阶项。它没有给每个固定 Δ 的精确 c_Δ ，也没有证明误差指数 $1/3$ 对所有连通图最优。论文必须把“精确首阶”与“完整渐近展开”区分开。

最容易掉进去的坑

错误诊所。

1. 错答：“ $\liminf$ 至少一，所以极限等于一。”还缺 $\limsup$ 至多一。
2. 错答：“ $c_\Delta \sim 1/\Delta$ 就是对每个 Δ 完全相等。”符号 $\sim$ 只表示比值趋一。
3. 错答：“ $A_\Delta = +\infty$ 与 $c_\Delta \rightarrow 0$ 矛盾。”前者是总缺口，可随顶点数累积；后者是每顶点归一化的最坏比例。
4. 错答：“极限使用了一张无限图。”每个 c_Δ 由有限图候选定义；最后让整数度数 Δ 增大。

先遮住答案，自己做

L1 (两题)。(1) 把 $c_\Delta > 1/\Delta - 6\Delta^{-4/3}$ 乘以正数 Δ 。(2) 解释为什么 $6\Delta^{-1/3} \rightarrow 0$ 。

L2 (两题)。(3) 从 $\liminf/\limsup$ 两式严格推出普通极限。(4) 向一个没学过渐近符号的高中生解释 $c_\Delta \sim 1/\Delta$ ，并给出一个“趋近但有限处不相等”的数列例子。

L3。(5) 列出至少三个仍开放或本论文未声称的问题；其中必须包括固定度精确值、全局二阶行为、rook 是否固定度极值三类。

核对答案与推理

半开放例 B。依次填“有限、连通”、等于、 ϕ_Δ 、 $1 - 6\Delta^{-1/3}$ 、一、一、一。

练习答案。(1) $\Delta c_\Delta > 1 - 6\Delta^{-1/3}$ ，因 $\Delta > 0$ 方向不变。(2) $\Delta^{1/3} \rightarrow \infty$ ，正数六除以越来越大的分母趋零。(4) 含义是 $c_\Delta/(1/\Delta) = \Delta c_\Delta \rightarrow 1$ ；例如 $(1 + 1/\Delta)/\Delta$ 与 $1/\Delta$ 有相同比值极限，但有限时不相等。(5) 见边界表；论文也未给每个固定度的最大化图分类。

六层评分示范 (第 3 题, 16 分)。

1. **下界来源 (3 分)：**有限 rook 图 $\rightarrow$ supremum $\rightarrow c_\Delta \geq \phi_\Delta$ 。
2. **显式误差 (3 分)：** $\Delta\phi_\Delta > 1 - 6\Delta^{-1/3}$ ，右边趋一，故 $\liminf$ 至少一。
3. **上界来源 (3 分)：**卡 50 的所有图通用界给 $\limsup$ 至多一。
4. **顺序事实 (2 分)：**任何数列总有 $\liminf \leq \limsup$ 。
5. **夹逼结论 (2 分)：**两者均等于一，因此普通极限存在且为一。
6. **边界复核 (3 分)：**所有图有限；只确定首阶；不推出固定 Δ 精确公式。

本卡过关门

☐ 闭卷讲完六步链；☐ 指着夹逼图解释上下方向；☐ 主动列三项“没有证明”；☐ 信心至少 4/5 并记录一次把 A_Δ 与 c_Δ 混淆的风险。红线卡缺一不通过。

一天后不同数据：若某数列满足 $1 - 5n^{-1/4} \leq y_n \leq 1 + 3n^{-1/2}$ ，用夹逼证明 $y_n \rightarrow 1$ ，并说明这没有给出 y_{100} 的精确值。

七天后口头迁移：三分钟内回答：为什么两种不同的极限都出现（先 $k \rightarrow \infty$ ，后 $\Delta \rightarrow \infty$ ）？

标准要点：前者在固定度内从一系列有限图抽出 ϕ_Δ ；后者比较不同固定度的极值数 c_Δ ；两者不可交换成一张双重无限图。

第七篇混合测验

先遮住答案，自己做

不翻书完成：

1. 对 R_5 证明阶、度、直径；
2. 对 $\Delta = 64$ 求 s, r, L ，造一棵 $T_{L,k}$ 并证明乘积实际最大度；
3. 重建 $\rho = k$ 的上下界；
4. 从 ϕ_Δ 推出精确误差恒等式；
5. 解释为什么有限图序列足以给 c_Δ 下界，却不保证极限取到；
6. 用不超过三分钟讲清 $\lim \Delta c_\Delta = 1$ ，并说出一个未解决问题。

核对答案与推理

总分一百：六题依次 15、15、15、20、15、20 分。达到 85 分且卡 52、54、57、59、60 的核心方向全部正确，才进入下一篇；任何红线题错，应回到对应卡，不以总分抵消。

附录 A 公式地图：每一条等式从哪里来

这张地图不是背诵清单。左栏是结论，中栏是最短证据链，右栏是最容易犯的错误。若看见公式却说不出中栏，就回到相应卡片。

公式或结论	证据链	红线错误
$\tau_D(G) + \rho(G) = n$	卡 04、05 的补集双向对应，再把最小大小变为补集的最大大小	只证明一个方向
$B_{HY}(G) = [\Delta(\Delta - 1)n + 2m]/(\Delta^2 + 1)$	Henning-Yeo 原猜想； Δ 是实际最大度	用任意度上界代入
$\mu = \Delta(\Delta - 1)n + 2m - (\Delta^2 + 1)\tau_D$	清正分母； $\mu < 0$ 恰为反例	把正负号说反
$\mu = (\Delta^2 + 1)\rho - [(\Delta + 1)n - 2m]$	代 $\tau_D = n - \rho$ ，再用握手引理	移项漏符号
$H_{t,r}$ 的 $n = t + 2r + 2$	数 a, b, X, C, D 五类顶点	漏掉 a, b
$H_{t,r}$ 的 $m = 2t + 3r + \binom{r}{2}$	X 两边、每条 $C - D$ 路三边、 D 团	团边重复计数
$\Delta(H_{t,r}) = t + r$	列五类度数并证明 a, b 达到	只给上界
$\mu(H_{t,r}) = -(t - 1)(r - 1)$	卡 15 从 deficit 式逐行化简	“整理可得”
loaded-tree: $n = qk, m = r q k / 2 + k - 1$	k 个正则纤维加树的 $k - 1$ 桥	quotient 非树仍套用
$\Delta = r + L$	每点度 $r + \lambda$ ，最大 load 实际达到 L	“至多”偷换成“等于”
$\rho = k$	每纤维至多一；unused selector 每纤维至少一	漏掉任一方向
$\mu = k((r + L)^2 + 3 - (L + 1)q) - 2$	代 n, m, ρ, Δ ；追踪 $2(k - 1)$	漏掉常数 -2
$A_\Delta = +\infty, \Delta \geq 4$	Petersen 分别处理四、五； H -chain 处理六以上	与 c_Δ 混同
$H_{2,2}$: $119 > 118$	$n = 8, m = 11, \Delta = 4, \tau_D = 7$	把计算最小性说成唯一性
$\rho(G) = \alpha(G^2)$	距离至少三等价于平方图中不相邻	忽略双向
$\rho/n \geq (1 + \Delta \bar{d})^{-1}$	Caro-Wei、AM-HM、charging、度平方	取倒数方向错
c_Δ 通用上界	packing 下界代入带负系数的 gap，再优化平均度	负系数方向错

公式或结论	证据链	红线错误
rook: $q = s^2, r = 2(s - 1), \text{diam} = 2$	棋盘坐标逐项证明	行列邻点重复
$s = \lfloor \Delta^{2/3} \rfloor, L = \Delta - 2s + 2$	卡 52 证明 $s \geq 4, L \geq 2$	只试数值
$c_\Delta \geq \phi_\Delta$	对每个有限大 k 有合法图; 用 supremum 接住极限	虚构无限图
$1 - \Delta\phi_\Delta$ 精确两项式	卡 58 通分	漏 +1 或负号
$c_\Delta \geq \Delta^{-1} - 6\Delta^{-4/3}$	卡 59 分别压两项误差	floor 方向错
$\lim \Delta c_\Delta = 1$	下界给 liminf, 通用上界给 limsup, 再夹逼	声称完整二阶项

三条主证明路线

1. **反例路线:** 定义 $\rightarrow$ 补集引理 $\rightarrow$ margin $\rightarrow H_{t,r} \rightarrow$ 全 $\Delta \geq 4$ 有反例。
2. **固定度放大路线:** loaded tree $\rightarrow$ packing 精确值 $\rightarrow$ margin 斜率 $\rightarrow$ Petersen 四、五度 + 高次链 $\rightarrow A_\Delta = \infty$ 。
3. **归一化极限路线:** G^2 /Caro-Wei 上界 $\rightarrow$ rook fibres 下界 $\rightarrow$ supremum $\rightarrow$ 精确误差 $\rightarrow$ squeeze。

附录 B 本册总门、错题与延迟复测记录

学完本卡，你应该能做到

本记录只覆盖本册：卡 42–60。勾选不是掌握证据；必须留下闭卷答案、错因和延迟复测日期。本册红线卡为：42、46、49、50、52、54、57、59、60。

本册总门

- ☐ 1. 所有入口诊断均按逐题失败路由处理，没有带错闯关。
- ☐ 2. 每卡至少完成一个完整例 A、一个半开放例 B、L1/L2/L3 和六层答案复核。
- ☐ 3. 我能闭卷重建本册主证明链，并指出每一步依赖的定义或前卡。
- ☐ 4. 红线卡已在首次学习、24 小时后和 7 天后各通过一次。
- ☐ 5. 我能把“已证明、计算支持、文献未检出、仍待确认”分开陈述。

错题记录

日期	卡/题	我的原错答	精确错因与失败路由	换题复核结果

日期	卡/题	我的原错答	精确错因与失败路由	换题复核结果

一天后与七天后复测

卡号	首次通过	24 小时题/日期	24 小时结果	7 天题/日期	7 天结果与错因

记录版本： 记录人： 最终确认日期：

附录 C 零基础中英术语与符号表

符号/英文	中文	读法	精确用途
$G = (V, E)$	图	图 G	V 是顶点集合, E 是边集合
null graph	空图	null graph	$V = \emptyset$; 没有顶点也没有边, 本书约定 $\Delta = 0$
edgeless graph	无边图	edgeless graph	可以有一个或多个顶点, 但 $E = \emptyset$; 不得与空图混称
n, m	阶、边数	恩、艾姆	$n = V , m = E $
$d_G(v)$	顶点度数	v 的度	与 v 相连的边数
$\Delta(G)$	实际最大度	德尔塔	全部顶点度数最大值
$\text{dist}_G(u, v)$	距离	distance	最短路边数; 不同分量为 $+\infty$
diameter	直径	diameter	连通图中最大点对距离
$\text{trace } e \cap T$	边的指纹/迹	交集	边在选点集合上留下的端点
identifying vertex cover	识别顶点覆盖	IVC	覆盖每边且不同边 trace 不同
$\tau_D(G)$	识别顶点覆盖数	tau 下标 D	IVC 的最小大小
packing	packing/距离打包	packing	任意两点距离至少三
$\rho(G)$	packing 数	rho	packing 最大大小
$B_{HY}(G)$	猜想右端	B 下标 H-Y	Henning-Yeo 上界表达式
$\mu(G)$	整数余量	mu	清分母后的右边减左边; 负为反例
additive gap	加性缺口	gap	$\tau_D - B_{HY} = -\mu/(\Delta^2 + 1)$
deficit	增广度亏损	deficit	$\Delta + 1 - d(v)$
fibre	纤维/块副本	fibre	loaded-tree 中的一份基图
port	端口	port	承接一条外部桥的纤维顶点
load λ	负载	lambda	同一点承接的桥 incidence 数
selector	选择点	selector	未被端口使用、用于 packing 的点
rooted product	根积	rooted product	每纤维同一根承接 quotient 边
A_Δ	固定度总缺口上确界	A 德尔塔	不除顶点数; 可为无穷
c_Δ	固定度人均缺口上确界	c 德尔塔	gap 除以阶后的 supremum
G^2	平方图	G squared	原图距离至多二的点在此相邻
$\alpha(G)$	独立数	alpha	最大独立集大小
$\bar{d}$	平均度	d bar	$2m/n$
Caro-Wei	独立集下界	卡罗-魏	由随机排序得到 $\sum 1/(d+1)$

符号/英文	中文	读法	精确用途
charging	记账/注入论证	charging	把对象分配到互异 incidence 以计数
R_s	rook graph	rook graph	$s \times s$ 棋盘同行或同列相邻
$\lfloor x \rfloor$	向下取整	floor	不超过 x 的最大整数
ϕ_Δ	rook 极限下界	phi	固定 Δ 、 $k \rightarrow \infty$ 的人均值
sup	上确界	supremum	最小共同上界，不必取到
lim inf, lim sup	下极限、上极限	limit	尾部最低/最高极限水平
		inferior/superior	
$f \sim g$	首阶渐近相等	asymptotic	$f/g \rightarrow 1$
$O(\cdot)$	量级上界	big O	绝对值最终不超过常数倍
provenance	来源沿革	provenance	对象、数据或文件的可追溯来源
novelty audit	查新审计	novelty audit	记录检索范围和近先例，不证明全球首次
SHA-256	文件哈希	SHA two five six	内容指纹，用于检测版本漂移

附录 D 68 卡最终掌握清单

这份纸面清单只用于定位学习进度；正式状态以交互文件中的本人答案、证据、确认时间和版本匹配为准。不要在尚未闭卷完成时预先打勾。

A. 定义、范围与符号 (01–09)

- ☐ 1. 研究对象和边界约定；
- ☐ 2. IVC 定义；
- ☐ 3. packing 定义；
- ☐ 4. 补集引理正向；
- ☐ 5. 补集引理反向；
- ☐ 6. $\tau_D + \rho = n$ ；
- ☐ 7. 实际最大度；
- ☐ 8. margin/gap 符号；
- ☐ 9. deficit reformulation。

B. $H_{t,r}$ (10–17)

- ☐ 10. 构造；
- ☐ 11. 阶与边数；
- ☐ 12. 各类度数；
- ☐ 13. 直径穷尽；
- ☐ 14. ρ, τ_D ；
- ☐ 15. margin；
- ☐ 16. 全 $\Delta \geq 4$ ；
- ☐ 17. 对角极限。

C. loaded tree (18–27)

- ☐ 18. 全部数据;
- ☐ 19. 全部假设;
- ☐ 20. 简单连通及 n, m ;
- ☐ 21. 实际最大度;
- ☐ 22. packing 上界;
- ☐ 23. selector 下界;
- ☐ 24. ρ, τ_D ;
- ☐ 25. margin;
- ☐ 26. 斜率阈值;
- ☐ 27. 适用边界。

D. 固定度无界 (28–35)

- ☐ 28. Petersen 参数;
- ☐ 29. $\Delta = 4$ 端口和 k ;
- ☐ 30. $P_{4,k}$ 参数;
- ☐ 31. $\Delta = 5$ 同根和 k ;
- ☐ 32. $P_{5,k}$ 参数;
- ☐ 33. 高次数实际最大度;
- ☐ 34. 高次数 packing/margin;
- ☐ 35. $A_\Delta = \infty$ 。

E. 计算最小性 (36–41)

- ☐ 36. $H_{2,2}$ 手算;
- ☐ 37. graph6/同构/provenance;
- ☐ 38. 枚举宇宙;
- ☐ 39. 主 checker;
- ☐ 40. 独立 checker;
- ☐ 41. 计算边界。

F. 通用上界 (42–50)

- ☐ 42. c_Δ 与 A_Δ ;
- ☐ 43. 既有通用估计;
- ☐ 44. 平方图;
- ☐ 45. Caro–Wei;
- ☐ 46. charging;
- ☐ 47. 求和换序;
- ☐ 48. packing 密度;
- ☐ 49. 负系数代入;
- ☐ 50. 优化与 $\limsup$ 。

G. rook 与精确首阶 (51–60)

- ☐ 51. rook 参数;
- ☐ 52. floor 边界;
- ☐ 53. 任意大精确度树;
- ☐ 54. rooted rook 最大度;
- ☐ 55. packing 与 τ_D ;
- ☐ 56. 有限 k 与 ϕ ;
- ☐ 57. supremum;
- ☐ 58. 精确误差;
- ☐ 59. 显式误差界;
- ☐ 60. squeeze 与开放边界。

H. 文献与责任 (61–68)

- ☐ 61. 原问题归属/同名辨析;
- ☐ 62. 邻近参数;
- ☐ 63. 构造与 packing 先例;
- ☐ 64. 最小图 provenance/新颖性;

- ☐ 65. supplement;
- ☐ 66. 署名行政事实;
- ☐ 67. AI 披露与能力门;
- ☐ 68. 双语、版本与外发授权。

学术边界

所有 68 项均需在对应卡完成独立作答; 28 张红线卡还需延迟复测。纸面勾选、完成率或 AI 的评价均不能替代本人证据与正式口试。