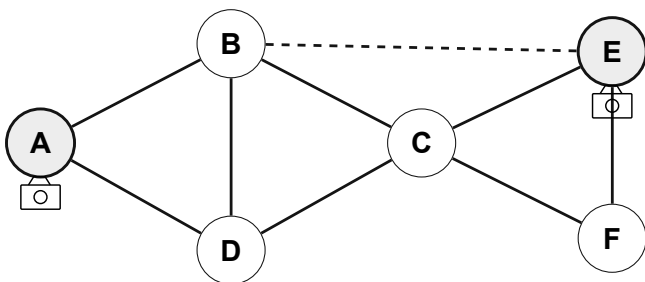


# 给道路装摄像头

一篇识别顶点覆盖反例论文的通俗故事



实线表示道路，虚线表示连接积木的桥；灰色路口安装了摄像头。

少数繁忙路口抬高了全城标准，  
大量普通路口积累了亏损，  
而秘密基地数量又太少，最终导致公式付不起账。

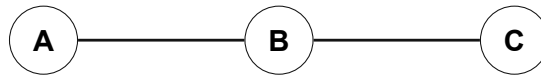
目录

|   |               |   |
|---|---------------|---|
| 1 | 点和线是什么        | 2 |
| 2 | 另一个看似不同的游戏    | 2 |
| 3 | 原来的猜想说什么      | 3 |
| 4 | 我们怎样让公式失效     | 3 |
| 5 | 为什么这不只是一次偶然失误 | 5 |
| 6 | 猜想为什么失败       | 5 |
| 7 | 最后还问：它到底能错多严重 | 6 |
|   | 整篇论文其实只做了五件事  | 7 |

## 1 点和线是什么

把一座城市画成很多点和线：

- 点：路口；
- 线：连接两个路口的道路。

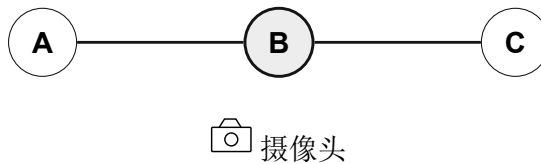


这里三个路口、两条道路。现在我们要在部分路口安装摄像头。

要求不只是“每条道路至少碰到一台摄像头”，还要求：

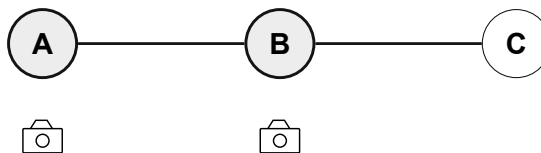
看一眼哪些摄像头拍到了这条道路，就能知道它究竟是哪一条道路。

例如只在  $B$  安装摄像头：



道路  $AB$  和道路  $BC$  都只被摄像头  $B$  拍到。它们的“摄像头指纹”一样，所以无法区分。

如果在  $A, B$  都安装：



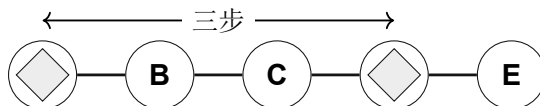
- $AB$  的指纹是  $\{A, B\}$ ；
- $BC$  的指纹是  $\{B\}$ 。

现在两条道路就能区分了。论文研究的  $\tau_D(G)$ ，就是：

至少需要安装多少台摄像头，才能覆盖并区分所有道路？

## 2 另一个看似不同的游戏

现在不装摄像头，改成选择“秘密基地”。两个秘密基地必须相距至少三步，否则它们太靠近，会互相干扰。



菱形表示秘密基地

最多能选多少个秘密基地，叫作 packing number:

$$\rho(G).$$

一个漂亮的事实是:

$$\tau_D(G) + \rho(G) = n.$$

意思是:

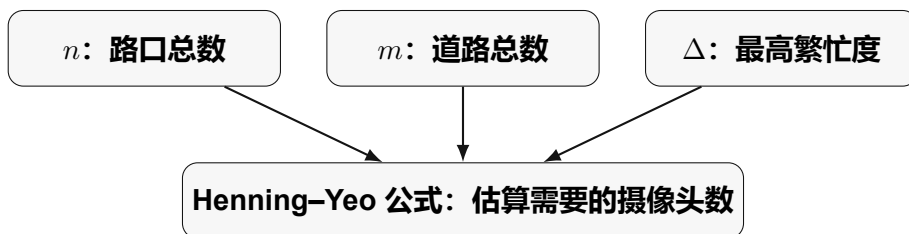
最优摄像头位置，恰好是最大秘密基地集合之外的所有路口。

所以，“最少放多少摄像头”和“最多藏多少秘密基地”，其实是同一道题的正反两面。

### 3 原来的猜想说什么

Henning 和 Yeo 根据三项数据设计了一个公式:

- 城市有多少个路口  $n$ ;
- 有多少条道路  $m$ ;
- 最繁忙的路口连接多少条道路  $\Delta$ 。



他们猜测：只要知道  $n, m, \Delta$ ，公式给出的摄像头数量一定够用。

他们还证明了:

- 所有路口一样繁忙时，公式正确;
- 最繁忙路口最多连接两条或三条道路时，公式正确。

所以这个猜想看起来很可信。

### 4 我们怎样让公式失效

论文设计了一种特殊的“积木城市”  $H_{t,r}$ 。它有两个特点。

## 特点一：少数超级路口很繁忙

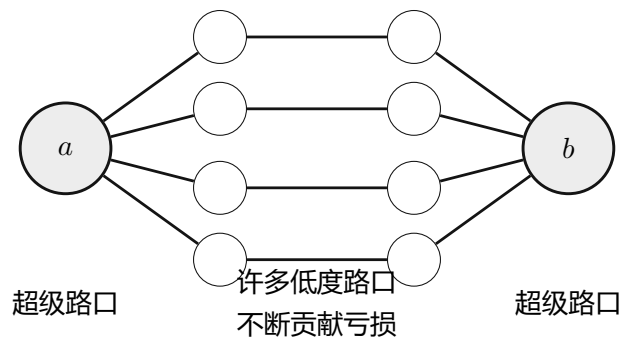
有两个大路口连接很多道路，于是最大度  $\Delta$  很大。

## 特点二：大量普通路口只有两三条道路

公式使用全城最高的  $\Delta$  衡量所有路口，却没有充分考虑大量低度路口造成的累积亏损。

### 一个直观类比

一座城市只有两栋一百层大楼，却按照“一百层楼城市”的标准估算所有建筑；实际上其余建筑全是矮房子，结果总账出现偏差。



同时，这座城市的任意两个路口最多走两步就能到达。因此两个秘密基地不可能相距三步，只能选一个：

$$\rho = 1.$$

秘密基地只能选一个，就意味着其余几乎所有路口都必须安装摄像头：

$$\tau_D = n - 1.$$

于是公式给少了。

最小的一张反例图只有：

- 8 个顶点；
- 11 条边；
- 最大度 4；
- 实际需要 7 个摄像头。

公式通分以后声称：

$$119 \leq 118,$$

但显然

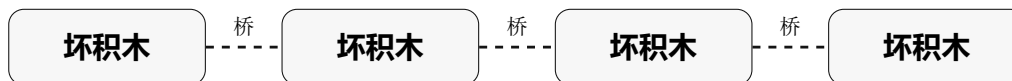
$$119 > 118.$$

所以猜想失败了。

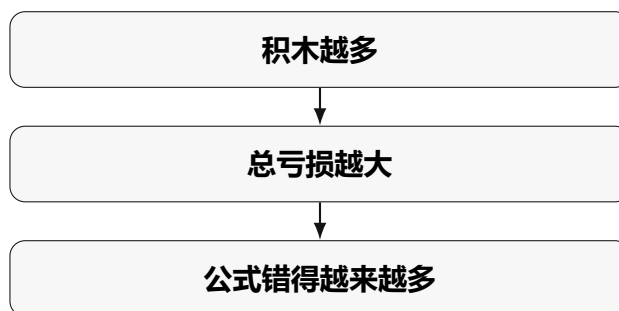
## 5 为什么这不只是一次偶然失误

如果只找到一张图，可能有人会说：公式只是因为取整，偶然差了一点点。

于是论文把许多“坏积木”连接起来：



每个坏积木都会带来一笔亏损。连接两块积木的桥只能补回很少一部分，而新积木带来的亏损更大。因此：



这证明了：

对每个固定的最大度  $\Delta \geq 4$ ，都能制造任意大的总误差。

所以：

- 向上取整救不了；
- 加 1、加 10、加 1000 都救不了；
- 即使允许为每个  $\Delta$  单独准备一个固定常数，也救不了。

## 6 猜想为什么失败

论文把原因写成一场“账单和预算”的比赛：

$$\underbrace{\sum_v (\Delta + 1 - d(v))}_{\text{所有低度路口的亏损账单}} \leq \underbrace{(\Delta^2 + 1)\rho(G)}_{\text{秘密基地提供的预算}} .$$

**亏损账单**

少数高度顶点抬高  $\Delta$   
 大量低度顶点持续记账

**可用预算**

每个秘密基地提供  $\Delta^2 + 1$   
 但直径二把  $\rho$  压到很小

**账单超过预算，猜想失效**

特殊城市中：

- 少数高度顶点把全局  $\Delta$  撑得很高；
- 大量低度顶点产生很大的总亏损；
- 直径二又把  $\rho$  压到很小；
- 最终账单超过预算。

少数繁忙路口抬高了全城标准，大量普通路口积累了亏损，而秘密基地数量又太少，最终导致公式付不起账。

**7 最后还问：它到底能错多严重**

论文定义  $c_\Delta$ ，表示：当最大度固定为  $\Delta$  时，最坏反例平均到每个路口能产生多少误差。

最后证明：

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta c_\Delta = 1.$$

小学生式地说：

当  $\Delta$  很大时，大约每  $\Delta$  个路口就能积累出一单位误差。

所以  $n$  个路口的最坏总误差大约是

$$\frac{n}{\Delta}.$$

而且论文证明了两件事：

- 有些城市真的能接近这么坏；
- 所有城市都不可能明显比这更坏。

## 整篇论文其实只做了五件事



## 一句最形象的总结

这篇论文发现了一条城市摄像头预算公式的漏洞，造出了会让预算失效的城市积木，再把积木不断连接，最后不仅证明预算一定会破产，还算出了破产速度。

说明：本文是面向零基础读者的概念性解释。正式定义、量词、构造细节、证明与文献归属，应以英文数学论文的最新核验版本为准。